Capítulo 5

El Teorema de los residuos.

Sumario. Concepto de residuo y métodos de cálculo. El Teorema de los residuos. Aplicaciones.

5.1 Residuo de un punto

Sean $f(z)$ una función de variable compleja y $z_0 \in \mathbb{C}$ una singularidad aislada de $f(z)$. Se define el *residuo de f en z_0* como

$$\operatorname{Res}(f(z), z_0) = a_{-1},$$

donde a_{-1} es el coeficiente de la serie de Laurent centrada en z_0 definida en un anillo de convergencia $A(z_0, 0, R)$, $R > 0$, de la forma

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Por ejemplo, si $f(z) = e^{1/z}$, se tiene que 0 es su única singularidad. Como para todo z del anillo $A(0, 0, \infty)$ se tiene que

$$e^{1/z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{z^n},$$

se tiene que

$$\operatorname{Res}(e^{1/z}, 0) = \frac{1}{1!} = 1.$$

A pesar de esta definición, no será necesario calcular el desarrollo de Laurent de una función para calcular el residuo, aunque en el caso de las singularidades esenciales es ésta la única técnica de la que dispondremos. En el caso de que la singularidad sea un polo de orden k, podremos calcular el residuo de $f(z)$ sobre éste de la siguiente manera. Supongamos que para todo punto del anillo de convergencia $A(z_0, 0, R)$, $R > 0$, se tiene que

$$f(z) = \sum_{n=1}^{k} \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

con $a_{-k} \neq 0$. Si multiplicamos esta expresión por $(z-z_0)^k$, se tiene que

$$(z-z_0)^k f(z) = \sum_{n=1}^{k} a_{-n}(z-z_0)^{k-n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^{n+k},$$

que como vemos es una serie de potencias. Si calculamos su derivada $(k-1)$–ésima

$$\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}[(z-z_0)^k f(z)] = (k-1)! a_{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+k)(n+k-1)(n+2)(z-z_0)^{n+1},$$

de donde, tomando límites cuando z tiende a z_0, obtenemos

$$\lim_{z\to z_0} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}[(z-z_0)^k f(z)] = (k-1)! a_{-1},$$

o equivalentemente, teniendo en cuenta que $\operatorname{Res}(f(z), z_0) = a_{-1}$,

$$\operatorname{Res}(f(z), z_0) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z\to z_0} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}[(z-z_0)^k f(z)].$$

Esta fórmula será la más utilizada en la práctica a la hora de resolver problemas. Por ejemplo, la función $f(z) = \frac{1}{z^2(z-1)}$ tiene dos singularidades aisladas, 0 y 1, que son polos de órdenes 2 y 1, respectivamente. Entonces, los residuos en dichos puntos los calcularemos con las fórmulas

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}(f(z), 1) &= \lim_{z\to 1} (z-1) f(z) \\ &= \lim_{z\to 1} \frac{1}{z^2} = 1, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}(f(z), 0) &= \frac{1}{1!} \lim_{z\to 0} \frac{d}{dz}[z^2 f(z)] \\ &= \lim_{z\to 0} \frac{-1}{(z-1)^2} = -1. \end{aligned}$$

5.2 El Teorema de los residuos

El Teorema de los residuos es uno de los resultados claves de la asignatura, ya que es un resumen de prácticamente todo el análisis complejo que se ha estudiado. Presenta también aplicaciones al cálculo real de las cuales estudiaremos una pequeña muestra durante el curso. Aunque existe una versión del mismo para curvas cerradas en general utilizando el concepto de índice de un punto respecto a una curva cerrada, se explicará aquí el resultado para curvas de Jordan.

Theorem 14 ***(de los residuos)*** *Sea γ una curva de Jordan C^1 a trozos orientada positivamente. Sea $f(z)$ una función derivable en $\overline{\mathrm{I}}(\gamma)$ excepto para una cantidad finita de puntos singulares aislados $z_1, z_2, ..., z_n \in \mathrm{I}(\gamma)$. Entonces*

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{n} \operatorname{Res}(f(z), z_j).$$

Demostración. Al haber una cantidad finita de singularidades aisladas, existirá un número real $r > 0$, suficientemente pequeño, de manera que las circunferencias $\gamma_j(t) = z_j + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, $1 \leq j \leq n$, están en el interior de γ, no se cortan entre sí, y cada una contiene en su interior una y sólo una de las singularidades de la función. Aplicando el Teorema de Cauchy para un conjunto de curvas, se tiene que

$$\int_\gamma f(z)dz = \sum_{j=1}^{n} \int_{\gamma_j} f(z)dz,$$

con lo que el teorema estará demostrado si probamos que

$$\int_{\gamma_j} f(z)dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f(z), z_j), \tag{5.1}$$

para $1 \leq j \leq n$.

Ahora bien, dentro de cada circunferencia se verifica que

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_j)^n,$$

por lo que

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_j} f(z)dz &= \int_{\gamma_j} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_j)^n dz \\ &\overset{*}{=} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{\gamma_j} a_n (z - z_j)^n dz. \end{aligned}$$

Calculamos aparte $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{\gamma_j} a_n (z-z_j)^n dz$. Si $n \geq 0$, la función $a_n(z-z_j)^n$ es derivable por tratarse de un polinomio, por lo que

$$\int_{\gamma_j} a_n (z - z_j)^n dz = 0$$

por el Teorema de Cauchy. Si $n = -1$, entonces

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_j} \frac{a_{-1}}{z - z_j} dz &= a_{-1} \int_0^{2\pi} \frac{1}{re^{it}} rie^{it} dt \\ &= 2\pi i a_{-1} = 2\pi i \operatorname{Res}(f(z), z_j). \end{aligned}$$

Finalmente, si $n \leq -2$, se tiene por las fórmulas integrales de Cauchy para la derivada que

$$\int_{\gamma_j} \frac{a_n}{(z - z_j)^{-n}} dz = \frac{2\pi i}{(-n-1)!} g^{n-1)}(z_j) = 0,$$

donde $g(z) = a_n$.

Así, la igualdad (5.1) es cierta y

$$\int_\gamma f(z)dz = \sum_{j=1}^{n} \int_{\gamma_j} f(z)dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{n} \operatorname{Res}(f(z), z_j),$$

con lo que termina la prueba del teorema.□

Por ejemplo, para calcular

$$\int_\gamma \frac{1}{z^2(z-1)}dz,$$

con $\gamma(t) = 2e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, basta con darse cuenta que las singularidades aisladas del integrando, 0 y 1, están dentro de la curva, con lo que aplicando el teorema de los residuos tenemos que, si denotamos $f(z) = \frac{1}{z^2(z-1)}$,

$$\begin{aligned} \int_\gamma \frac{1}{z^2(z-1)}dz &= 2\pi i[\mathrm{Res}(f(z), 0) + \mathrm{Res}(f(z), 0)] \\ &= 2\pi i[-1 + 1] = 0. \end{aligned}$$

5.3 Aplicaciones al cálculo de integrales reales

Para finalizar este tema explicaremos algunas de las prometidas aplicaciones del Teorema de los residuos al cálculo real, especialmente al cálculo de integrales definidas. Por motivos de tiempo no será posible hacer demostraciones de todas las fórmulas que se obtendrán a continuación, que serán objeto de estudio durante las clases prácticas de la asignatura. Los alumnos ya habrán estudiado las integrales impropias durante la asignatura de primer curso *fundamentos matemáticos de la ingeniería*, pero haremos un pequeño resumen de las nociones básicas sobre este tipo de integrales. Las integrales que consideraremos son las siguientes:

- $\int_0^{2\pi} f(\cos t, \sin t)dt$ donde $f(x, y) = P(x, y)/Q(x, y)$ donde P, Q son funciones polinómicas. Estas integrales se obtendrán calculando los residuos en el círculo unidad de una función a determinar de un modo estándar.

- $\int_{-\infty}^{\infty} P(t)/Q(t)dt$ donde P, Q son funciones polinómicas tales que $\deg(Q) \geq \deg(P) + 2$ (deg denota el grado del polinomio), y $Q(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Estas integrales se obtendrán a partir de la fórmula

$$\int_{-\infty}^{\infty} P(t)/Q(t)dt = 2\pi i \sum_{\mathrm{Im}(z)>0} \mathrm{Res}(P/Q, z).$$

- $\int_{-\infty}^{\infty} P(t)\cos(at)/Q(t)dt$ y $\int_{-\infty}^{\infty} P(t)\sin(at)/Q(t)dt$ donde $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, y P, Q son funciones polinómicas tales que $\deg(Q) \geq \deg(P) + 1$ y $Q(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Estas integrales se obtendrán como partes real e imaginaria de $\int_{-\infty}^{\infty} P(t)e^{iat}/Q(t)dt$ que se calcula con la fórmula

$$\int_{-\infty}^{\infty} P(t)e^{iat}/Q(t)dt = 2\pi i \sum_{\mathrm{Im}(z)>0} \mathrm{Res}(f, z),$$

con $f(z) = e^{iaz}P(z)/Q(z)$.

- $\int_{-\infty}^{\infty} P(t)/Q(t)dt$ donde P, Q son funciones polinómicas tales que $\deg(Q) \geq \deg(P) + 2$ y todo cero real de Q tiene a lo sumo multiplicidad 1. El valor principal de esta integral dado por

$$\lim_{r\to\infty} \int_{-r}^{r} P(t)/Q(t)dt$$

se obtendrá calculando

$$2\pi i \sum_{\mathrm{Im}(z)>0} \mathrm{Res}(P/Q, z) + \pi i \sum_{\mathrm{Im}(z)=0} \mathrm{Res}(P/Q, z).$$

- $\int_{-\infty}^{\infty} P(t)\cos(at)/Q(t)dt$ y $\int_{-\infty}^{\infty} P(t)\sin(at)/Q(t)dt$ donde $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, y P, Q son funciones polinómicas tales que $\deg(Q) \geq \deg(P) + 1$ y todos los ceros reales de Q son simples. En este caso
$$\lim_{r\to\infty} \int_{-r}^{r} P(t)e^{iat}/Q(t)dt = 2\pi i \sum_{\mathrm{Im}(z)>0} \mathrm{Res}(f, z) + \pi i \sum_{\mathrm{Im}(z)=0} \mathrm{Res}(f, z)$$
donde $f(z) = e^{iaz}P(z)/Q(z)$, de donde podemos obtener los valores principales de las integrales anteriores.

5.4 Ejercicios

1. Determina y clasifica las singularidades de las funciones:

   (a) $\dfrac{1}{z - z^3}$ (b) $\dfrac{z^4}{1 + z^4}$ (c) $\dfrac{z^5}{(1 - z)^2}$

   (d) $\dfrac{1}{z\,(z^2 + 4)^2}$ (e) $\dfrac{z^2 + 1}{e^z}$ (f) $\dfrac{1}{e^z - 1} - \dfrac{1}{z}$

   (g) $e^{z - \frac{1}{z}}$

2. Calcula los residuos de las siguientes funciones en sus singularidades.

   (a) $\dfrac{1}{z^3 - z^5}$ (b) $\dfrac{z^2}{(z^2 + 1)^2}$ (c) $\dfrac{1}{z\,(1 - z^2)}$

   (d) $\dfrac{sen\, z}{(z + 1)^3}$ (e) $\operatorname{tg} z$ (f) $\dfrac{1}{sen\, z}$

   (g) $e^{z + \frac{1}{z}}$ (h) $sen\,(z) sen\,(1/z)$ (i) $\dfrac{e^{2\,z}}{(z - 1)^2}$

   (j) $\dfrac{z - sen\, z}{z}$ (k) $z\cos(1/z)$ (l) $\dfrac{1}{z + z^2}$

3. Calcula los residuos de las siguientes funciones en sus singularidades, indicando además de qué tipo son dichas singularidades.

   (a) $f(z) = \dfrac{senz}{(z + 1)^3}$, (b) $g(z) = e^{-\frac{1}{z}}$, (c) $h(z) = \dfrac{z - senz}{z}$

4. Calcula los residuos de las siguientes funciones en sus singularidades, clasificando éstas previamente.

   (a) $f(z) = \dfrac{z^2}{(z + 1)^3(z + \mathbf{i})}$, (b) $g(z) = e^{1/(z - 2\mathbf{i})}$, (c) $h(z) = \dfrac{z - senz}{z(z - 1)}$

5. Utiliza el teorema de los residuos para calcular las integrales siguientes:

$$\begin{array}{lll}
\text{(a)} & \displaystyle\int_\gamma \frac{e^{-z}}{z^2}\,dz, & \gamma(t) = 3\,e^{\mathbf{i}t},\ t\in[0,2\pi] \\
\text{(b)} & \displaystyle\int_\gamma z^2 e^{1/z}\,dz, & \gamma(t) = 3\,e^{\mathbf{i}t},\ t\in[0,2\pi] \\
\text{(c)} & \displaystyle\int_\gamma \frac{z+1}{z^2-2z}\,dz, & \gamma(t) = 3\,e^{\mathbf{i}t},\ t\in[0,2\pi] \\
\text{(d)} & \displaystyle\int_\gamma \frac{z}{(z-1)(z-2)}\,dz, & \gamma(t) = 2+\dfrac{e^{\mathbf{i}t}}{2},\ t\in[0,2\pi]
\end{array}$$

6. Sea $\gamma(t) = 1 + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. Calcular en función del parámetro r el valor de las siguientes integrales:

(a) $\displaystyle\int_\gamma \frac{z-1}{z^3+2z^2+z}dz.$

(b) $\displaystyle\int_\gamma \frac{2z}{z^4+2z^2+1}dz.$

(c) $\displaystyle\int_\gamma e^z \frac{z^2}{z^3-2z^2+1}dz.$

(d) $\displaystyle\int_\gamma z^2 e^{1/z} dz.$

7. Sea γ el cuadrado de vértices (R, R), $(-R, R)$, $(-R, -R)$ y $(R, -R)$ recorrido en sentido positivo. Determinar las integrales siguientes en función del parámetro R.

(a) $\displaystyle\int_\gamma \frac{z-1}{z^3+2z^2+z}dz.$

(b) $\displaystyle\int_\gamma \frac{2z}{z^4+2z^2+1}dz.$

(c) $\displaystyle\int_\gamma e^z \frac{z^2}{z^3-2z^2+1}dz.$

(d) $\displaystyle\int_\gamma z^2 e^{1/z} dz.$

8. Calcula el valor de la integral

$$\int_\gamma \frac{e^{1/z}}{\mathbf{i}z+2}\,dz$$

siendo γ la curva cuyo rango se representa en la figura siguiente.