Capítulo 4

Series de potencias y de Laurent. Polos y residuos.

Sumario. Series de potencias. Radio y disco de convergencia. Teorema de Taylor. Funciones analíticas. Derivación e integración de series de potencias. Aplicaciones de las series de potencias. Series de Laurent. Anillo de convergencia. Singularidades de funciones de variable compleja. Clasificación de singularidades aisladas.

4.1 Series de potencias

Una *serie de potencias* de centro $z_0 \in \mathbb{C}$ es una expresión de la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

donde $a_n \in \mathbb{C}$ para todo $n \geq 0$. Diremos que la serie converge en un número complejo w si la serie numérica

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (w - z_0)^n$$

es convergente. Si además dicha serie converge absolutamente en dicho número, diremos que la serie de potencias converge absolutamente en w. Es claro que cualquier serie de potencias converge en su centro.

Se define el *radio de convergencia* de la serie como el número

$$R := \sup\{r \geq 0 : \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n < +\infty\}.$$

Si un número complejo z verifica que $|z - z_0| = r < R$, entonces

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n (z - z_0)^n| = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n < +\infty,$$

por lo que la serie de potencias será absolutamente convergente en el disco $D(z_0, R) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}$. Si por el contrario $z \in \mathbb{C} \setminus \overline{D}(z_0, R)$, la serie divergerá, no pudiendose afirmar nada en general sobre la convergencia de la serie en la frontera del disco.

Además, si aplicamos el criterio de la raíz a la serie $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n(z - z_0)^n|$, se tendrá que si existe

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n(z - z_0)^n|} < 1,$$

la serie será aboslutamente convergente, por lo que

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < \frac{1}{|z - z_0|},$$

por lo que

$$R = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

De forma análoga, si aplicamos el criterio del cociente, en caso de existir y verificar que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}(z - z_0)^{n+1}|}{|a_n(z - z_0)^n|} < 1,$$

la serie será absolutamente convergente, de donde

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < \frac{1}{|z - z_0|},$$

por lo que

$$R = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}}.$$

Algunas series de potencias ya conocidas son por ejemplo la exponencial

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Si aplicamos el criterio del cociente a la misma, vemos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0,$$

por lo que el radio de convergencia será $R = 1/0 = \infty$. Como ya sabíamos, esta serie converge en todo el plano complejo.

Por ejemplo, la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^n z^n$$

no converge nada más que en su centro ya que

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^n} = \lim_{n\to\infty} n = \infty,$$

por lo que su radio de convergencia será $R = 1/\infty = 0$.

Un ejemplo que debe ser conocido también es la serie geométrica

$$1 + z + z^2 + ... + z^n + ... = \sum_{n=0}^{\infty} z^n,$$

que será de gran importancia práctica para el desarrollo en serie de potencias de la mayoría de funciones que vamos a considerar. Por cualquiera de los dos criterios anteriores vemos que su radio de convergencia es 1, por lo que dicha serie converge si $|z| < 1$. Además, si denotamos por

$$S_n = 1 + z + z^2 + ... + z^n,$$

entonces

$$S_n - zS_n = 1 - z^{n+1},$$

de donde

$$S_n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}.$$

Dado que $|z| < 1$, se verifica que $\lim_{n\to\infty} z^{n+1} = 0$ y así

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \lim_{s\to\infty} S_n = \frac{1}{1-z}.$$

Por otra parte, si $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ sobre el disco de convergencia de la serie y derivamos, se tiene que

$$\begin{aligned} f^{k)}(z) &= \frac{d^k}{dz^k}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n\right) \\ &\overset{*}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d^k}{dz^k} a_n (z - z_0)^n \\ &= \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)...(n-k) a_n (z - z_0)^{n-k}, \end{aligned}$$

por lo que sustituyendo en z_0 obtenemos

$$a_k = \frac{f^{k)}(z_0)}{k!},$$

para todo $k \geq 0$.

Una función $f(z)$ definida sobre un abierto $A \subset \mathbb{C}$ se dirá *analítica* en $z_0 \in A$ si existe una serie de potencias tal que $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ para todo $z \in A$ perteneciente al disco de convergencia de la serie. El siguiente resultado probará que toda función analítica es derivable y viceversa. Además del mismo se deducirá la unicidad del desarrollo en serie de potencias.

Theorem 10 ***(Taylor)*** *Sean $A \subset \mathbb{C}$ un conjunto abierto y $f : A \to \mathbb{C}$ derivable. Sean $z_0 \in A$ y $r > 0$ tales que $\overline{D}(z_0, r) \subset A$. Entonces*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n,$$

converge absolutamente sobre $D(z_0, r)$.

Demostración. Vamos a ver que la serie converge absolutamente en cualquier punto del disco. Para ello, sean $z \in D(z_0, R)$ y $\rho = |z - z_0| < r < R$. Tomamos la circunferencia centrada en z_0 y de radio r. Por las desigualdades de Cauchy, se tiene que

$$|f^{n)}(z_0)| \leq \frac{n!}{r^n} M(r),$$

donde $M(r) = \max\{|f(z)| : |z - z_0| = r\}$. Entonces

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{f^{n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n \right| &\leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|f^{n)}(z_0)|}{n!}|z - z_0|^n \\ &\leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho^n}{r^n} M(r) \\ &= M(r) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\rho}{r}\right)^n = M(r)\frac{r}{r - \rho}, \end{aligned}$$

por tratarse de una suma de una serie geométrica. Por lo tanto la serie de potencias es convergente absolutamente en el interior del disco, y tiene la forma anteriormente indicada.□

4.2 Series de Laurent

Una *serie de Laurent* centrada en $z_0 \in \mathbb{C}$ es una expresión de la forma

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n. \tag{4.1}$$

Claramente puede dividirse en dos partes,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n, \tag{4.2}$$

que es una serie de potencias llamada *parte regular* de la serie de Laurent y

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z - z_0)^{-n} \tag{4.3}$$

que se llamará *parte singular*. Obviamente, para garantizar la convergencia de la serie de Laurent (4.1), deben converger las series (4.2) y (4.3). Como vimos en el primer apartado del tema, la serie

(4.2) convergerá absolutamente en su disco de convergencia $D(z_0, R)$. Para la serie (4.3), el cambio de variable $Z = 1/(z - z_0)$ la transforma en la serie de potencias

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} Z^n$$

que convergerá absolutamente en su disco de convergencia $D(0, r)$, por lo que (4.3) convergerá siempre que $|z - z_0| > r$. Así, si $r < R$ se tendrá que la serie de Laurent inicial convergerá absolutamente en el *anillo de convergencia*

$$A(z_0, r, R) := \{z \in \mathbb{C} : r < |z - z_0| < R\},$$

mientras que será divergente en $\mathbb{C} \setminus \overline{A}(z_0, r, R)$.

Por otra parte, si

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

en un cierto anillo de convergencia, entonces multiplicando dicha expresión por $(z - z_0)^{-k-1}$, $k \in \mathbb{Z}$, se verifica que

$$\frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^{n-k-1}.$$

Si $\gamma(t) = z_0 + \rho e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, denota una circunferencia dentro del anillo de convergencia, entonces

$$\begin{aligned} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz &= \int_\gamma \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^{n-k-1} dz \\ &\overset{*}{=} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_\gamma a_n (z - z_0)^{n-k-1} dz. \end{aligned}$$

Si $n - k - 1 \geq 0$, entonces $a_n (z - z_0)^{n-k-1}$ es derivable, y por el Teorema de Cauchy se tiene que

$$\int_\gamma a_n (z - z_0)^{n-k-1} dz = 0.$$

Si $n - k - 1 = -1$, entonces

$$\int_\gamma \frac{a_n}{z - z_0} dz = \int_0^{2\pi} \frac{a_n}{\rho e^{it}} \rho i e^{it} dt = 2\pi i a_n.$$

Finalmente, si $n - k - 1 \leq -2$, se tiene por las fórmulas integrales de Cauchy que

$$\begin{aligned} \int_\gamma a_n (z - z_0)^{n-k-1} dz &= \int_\gamma \frac{a_n}{(z - z_0)^{k+1-n}} dz \\ &= \frac{2\pi i}{(n - k)!} g^{n-k)}(z_0) = 0, \end{aligned}$$

donde $g(z) = a_n$. Entonces

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz = 2\pi i a_n,$$

o equivalentemente

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz, \tag{4.4}$$

que es la fórmula análoga al Teorema de Taylor para series de Laurent. Veamos que una serie así construída es siempre convergente en su anillo de convergencia.

Theorem 11 ***(Laurent)*** *Sean $z_0 \in \mathbb{C}$, $0 \le r < R$, y $f : A(z_0, r, R) \to \mathbb{C}$ una función derivable. Entonces*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$$

donde los coeficientes a_n satisfacen las identidades (4.4).

Demostración. Vamos a ver que la serie así construída es convergente, lo que probará el resultado. Sean $r < \rho_1 < \rho < \rho_2 < R$ y $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z-z_0| = \rho$. Acotamos de forma análoga a las desigualdades de Cauchy

$$\begin{aligned} |a_n| &= \left|\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz\right| \\ &\le \frac{1}{2\pi}M(\rho)\frac{1}{\rho^{n+1}}l(\gamma) = \frac{M(\rho)}{\rho^n}, \end{aligned}$$

donde $M(\rho) = \max\{|f(z)| : z \in \mathrm{graf}(\gamma)\}$ y $\gamma(t) = z_0 + \rho e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.

Si ahora tomamos la parte regular y procedemos como en la demostración del Teorema de Taylor, con $\gamma(t) = z_0 + \rho_2 e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, se verifica que

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n(z-z_0)^n| \le M(\rho_2)\frac{\rho_2}{\rho_2 - \rho},$$

por lo que la parte regular es absolutamente convergente. Tomamos ahora la parte singular y la circunferencia $\gamma(t) = z_0 + \rho_1 e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, tratamos de acotar

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{0} |a_n(z-z_0)^n| &= \sum_{n=-\infty}^{0} \frac{|a_{-n}|}{|z-z_0|^{-n}} \\ &\le \sum_{n=-\infty}^{0} \frac{M(\rho_1)}{\rho^{-n}\rho_1^n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} M(\rho_1)\frac{\rho_1^n}{\rho^n} = M(\rho_1)\frac{\rho}{\rho - \rho_1}, \end{aligned}$$

por lo que la parte singular también converge, y el teorema está probado.□

4.3 Singularidades de una función compleja. Clasificación de singularidades aisladas

Finalizaremos el tema haciendo un estudio de las singularidades de una función de variable compleja. Dada una función de variable compleja $f(z)$, se dice que $z_0 \in \mathbb{C}$ es una *singularidad* de f si ésta no es derivable en z_0. Así todo $z \in \mathbb{C}$ es una singularidad para $f(z) = \bar{z}$, mientras que 0 es una singularidad para $f(z) = 1/z$. Una singularidad z_0 se dirá *aislada* si existe $\delta > 0$ tal que la función es derivable en $D(z_0, \delta) \setminus \{z_0\}$. Nótese que por el Teorema de Taylor, f debe ser discontinua en sus singularidades aisladas.

Distinguiremos tres tipos de singularidades aisladas de una función f atendiendo básicamente al desarrollo de Laurent de la función en la singularidad. Si z_0 denota la singularidad y

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

sobre su anillo de convergencia $A(z_0, 0, R)$, se tiene

- La singularidad z_0 se dirá *evitable* si $a_{-n} = 0$ para todo $n > 0$.
- La singularidad z_0 se dirá *un polo* si la parte singular del desarrollo de Laurent tiene una cantidad finita de términos. Se dirá *orden del polo* al mayor natural k que cumple que $a_{-k} \neq 0$ y $a_{-n} = 0$ para todo $n > k$.
- La singularidad z_0 se dirá *esencial* si la parte singular del desarrollo de Laurent tiene una cantidad infinita de términos.

Por ejemplo, la función

$$\frac{\sin z}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n}$$

presenta una singularidad aislada en 0 que es evitable, $\frac{1}{z}$ tiene en 0 un polo de orden 1, mientras que

$$e^{1/z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! z^n}$$

tiene en 0 una singularidad esencial. El siguiente resultado ofrece una clasificación de las singularidades aisladas de una función de variable compleja.

Theorem 12 *Sean $z_0 \in \mathbb{C}$ y f una función derivable definida en $D(z_0, \delta) \setminus \{z_0\}$. Entonces:*

(a) z_0 es evitable si y sólo si existe $\lim_{z \to z_0} f(z) = l \in \mathbb{C}$. Además si definimos f en z_0 como $f(z_0) = l$ se tiene que f es derivable en $D(z_0, \delta)$.

(b) z_0 es un polo de orden k si y sólo si existe $\lim_{z \to z_0} (z - z_0)^j f(z) = \infty$ para $0 \leq j < k$ y $\lim_{z \to z_0} (z - z_0)^k f(z) \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

(c) z_0 es una singularidad esencial si y sólo si no existe el $\lim_{z \to z_0} f(z)$. Además en este caso para todo $w \in \mathbb{C}$ existe una sucesión z_n convergiendo a z_0 de manera que $\lim_{n \to \infty} f(z_n) = w$.

Demostración. (a) es consecuencia inmediata del Teorema de Taylor. Para comprobar (b), démonos cuenta de que para todo $j \in \{0, 1, ..., k-1\}$ la función $(z - z_0)^j f(z)$ sigue teniendo parte singular, por lo que

$$\lim_{z \to z_0} (z - z_0)^j f(z) = \infty,$$

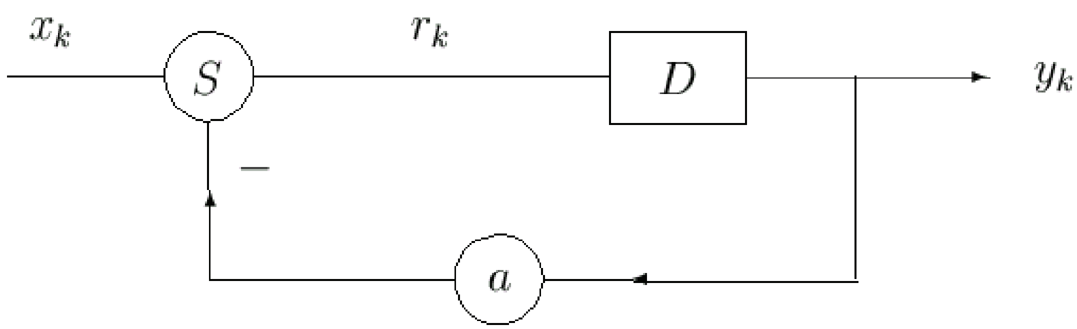
mientras que $(z - z_0)^k f(z)$ es una serie de potencias cuyo primer témino a_{-k} es no nulo. De aquí se deriva (b). La demostración de (c) excede los contenidos del curso.□

Una vez clasificadas las singularidades aisladas de una función de variable compleja, estamos en disposición de estudiar el Teorema de los residuos en la próxima lección.

4.4 Transformada Z

4.4.1 Ecuaciones en diferencias finitas

El interés del estudio de la transformada Z es debido a que es la análoga a la transformada de Laplace para resolver ecuaciones en diferencias finitas. Estas ecuaciones aparecen en ingeniería al modelizar sistemas electrónicos cuyas entradas y salidas son una sucesión de datos discretos. Para fijar ideas, consideremos el siguiente ejemplo.



Este dispositivo está formado por dos elementos. El primero de ellos, marcado con una S, es un elemento que suma o resta datos, que a su vez vendrán modulados por números reales. El denotado por una D es un aparato que produce un retardo de una unidad temporal en la sucesión. La figura representa el tipo más sencillo de retroalimentación de una señal. Los datos de entrada vienen dados por la sucesión x_k y los de salida por

$$y_{k+1} = r_k. \tag{4.5}$$

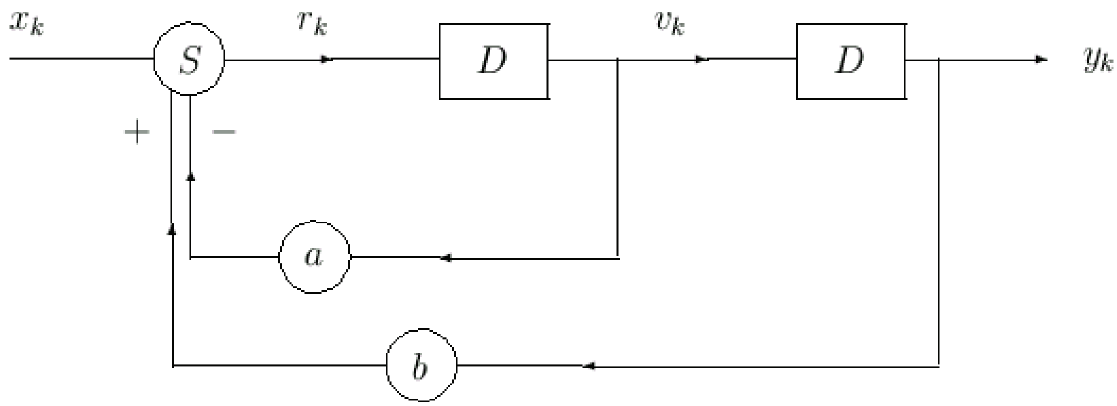
En el proceso, los datos intermedios r_k vienen dados por la expresión

$$r_k = x_k - a y_k, \tag{4.6}$$

donde a es un número real. Combinando (4.5) y (4.6) obtenemos la ecuación en diferencias de orden uno

$$y_{k+1} + a y_k = x_k.$$

Si complicamos el dispositivo, como se muestra en la figura,



se obtiene una ecuación de orden dos. Aquí

$$y_{k+1} = v_k,$$

$$v_{k+1} = r_k,$$

$$r_k = x_k + by_k - av_k,$$

de donde se obtiene la ecuación

$$y_{k+2} + ay_{k+1} - by_k = x_k.$$

El uso de la transformada Z permite afrontar con ciertas garantías de éxito la resolución de estas ecuaciones. Por ejemplo supongamos la ecuación

$$\begin{cases} y_{k+2} + y_{k+1} - 2y_k = 1; \\ y_0 = 0, \ y_1 = 1. \end{cases}$$

Vamos a ver cómo la transformada Z nos permite obtener la solución de la ecuación anterior transformando dicho problema en un problema algebraico.

4.4.2 Definición y propiedades básicas

Consideremos una sucesión de números complejos x_k. Se define la *transformada Z* de la misma como la serie

$$\mathcal{Z}[x_k](z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_n}{z^n}. \tag{4.7}$$

Nótese que (4.7) es una serie de Laurent con parte regular x_0 y parte singular $\sum_{n=1}^{\infty} x_n z^{-n}$, y que por tanto convergerá en un disco de convergencia de la forma

$$A(0, r, +\infty) = \{z \in \mathbb{C} : |z| > r\}$$

donde r es el radio de convergencia de la serie de potencias $\sum_{n=1}^{\infty} x_n z^n$.

Por ejemplo, si $\delta = (1, 0, 0, 0, ...)$ entonces su transformada Z es

$$\mathcal{Z}[\delta](z) = 1$$

definida en todo el plano complejo. Si $x_k = (1, 1, 1, ...)$, entonces

$$\mathcal{Z}[1](z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^n} = \frac{1}{1 - \frac{1}{z}} = \frac{z}{z-1},$$

siempre que $|z| > 1$.

Propiedades básicas.

- Linealidad. Dadas las sucesiones x_k e y_k y $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, se verifica

$$\mathcal{Z}[\alpha x_k + \beta y_k](z) = \alpha \mathcal{Z}[x_k](z) + \beta \mathcal{Z}[y_k](z)$$

  para todo z en el dominio de definición de $\mathcal{Z}[x_k](z)$ y $\mathcal{Z}[y_k](z)$.

Demostración. Basta calcular

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}[\alpha x_k + \beta y_k](z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha x_n + \beta y_n}{z^n} \\
&= \alpha \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_n}{z^n} + \beta \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y_n}{z^n} = \alpha \mathcal{Z}[x_k](z) + \beta \mathcal{Z}[y_k](z).
\end{aligned}$$

■

- Dada la sucesión x_k, definimos la nueva sucesión $y_k = x_{k+1}$. Entonces

$$\mathcal{Z}[y_k](z) = \mathcal{Z}[x_{k+1}](z) = z\mathcal{Z}[x_k](z) - zx_0.$$

  En general, si $k_0 \in \mathbb{N}$ y definimos $y_k = x_{k+k_0}$, tenemos la fórmula

$$\mathcal{Z}[x_{k+k_0}](z) = z^{k_0} \mathcal{Z}[x_k](z) - \sum_{n=0}^{k_0-1} x_n z^{k_0-n}.$$

Demostración. Calculamos

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}[x_{k+1}](z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_{n+1}}{z^n} \\
&= z \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_{n+1}}{z^{n+1}} = z \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{z^n} \\
&= z \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_n}{z^n} - zx_0 = z\mathcal{Z}[x_k](z) - zx_0.
\end{aligned}$$

■

- Dada la sucesión x_k y $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, se verifica
$$\mathcal{Z}[a^k x_k](z) = \mathcal{Z}[x_k](z/a).$$

Dmostración. Calculamos
$$\mathcal{Z}[a^k x_k](z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n x_n}{z^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_n}{(z/a)^n} = \mathcal{Z}[x_k](z/a).$$

■

Por ejemplo, si $x_k = (1, 2, 2^2, 2^3, ...)$, se tiene que
$$\mathcal{Z}[2^k](z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{z^n} = \frac{1}{1-\frac{2}{z}} = \frac{z}{z-2}.$$

- Dadas las sucesiones x_k y k^m, $m \in \mathbb{N}$, se verifica
$$\mathcal{Z}[k^m x_k](z) = [-z\frac{d}{dz}]^m \mathcal{Z}[x_k](z),$$
donde por $-z\frac{d}{dz}$ se entiende la operación derivada y luego multiplicación por $-z$.

Demostración. Hacemos la demostración por inducción en m. Si $m = 1$, entonces
$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}[kx_k](z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{nx_n}{z^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx_n}{z^n} \\
&= z\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx_n}{z^{n+1}} = z\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dz}\frac{-x_n}{z^n} \\
&= z\frac{d}{dz}\left(-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{z^n}\right) = -z\frac{d}{dz}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_n}{z^n} - x_0\right) = -z\frac{d}{dz}\mathcal{Z}[x_k](z).
\end{aligned}$$
Si suponemos el resultado cierto para m, veamos que también lo es para $m+1$. Para esto calculamos
$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}[k^{m+1}x_k](z) &= \mathcal{Z}[k \cdot k^m x_k](z) = -z\frac{d}{dz}\mathcal{Z}[k^m x_k](z) \\
&= (-z\frac{d}{dz})[-z\frac{d}{dz}]^m \mathcal{Z}[x_k](z) = [-z\frac{d}{dz}]^{m+1}\mathcal{Z}[x_k](z).
\end{aligned}$$

■

Por ejemplo, si $x_k = k^2$, entonces
$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}[k^2](z) &= [-z\frac{d}{dz}]^2 \mathcal{Z}[1](z) = [-z\frac{d}{dz}]^2 \frac{z}{z-1} \\
&= -z\frac{d}{dz}\left(-z\frac{d}{dz}\frac{z}{z-1}\right) = -z\frac{d}{dz}\left(\frac{-z}{z-1} + \frac{z^2}{(z-1)^2}\right) \\
&= \frac{z}{z-1} - \frac{3z^2}{(z-1)^2} + \frac{2z^3}{(z-1)^3},
\end{aligned}$$
si $|z| > 1$.

4.4.3 Transformada Z inversa

Es interesante obtener transformadas Z inversas de funciones de variable compleja $F(z)$, es decir, qué sucesiones verifican que

$$\mathcal{Z}[x_n](z) = F(z),$$

o equivalentemente

$$x_n = \mathcal{Z}^{-1}[F(z)].$$

Para calcular la transformada Z de una función $F(z)$ basta calcular el desarrollo en serie de Laurent centrada en cero de manera que tenga un anillo de convergencia de la forma $\{z \in \mathbb{C} : |z| > r\}$, donde $r \geq 0$. Por ejemplo, si $F(z) = \frac{1}{z-1}$, entonces desarrollando en serie de Laurent

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}$$

si $|z| > 1$. Entonces la sucesión

$$x_k = \mathcal{Z}^{-1}[1/(z-1)] = (0, 1, 1, 1, ...).$$

4.4.4 Aplicación a la resolución de la ecuación en diferencias

Consideramos el problema

$$\begin{cases} y_{k+2} + y_{k+1} - 2y_k = 1; \\ y_0 = 0, \ y_1 = 1, \end{cases}$$

obtenido anteriormente. Tomando la transformada Z en la ecuación, usando las propiedades de ésta y tomando en consideración las condiciones iniciales obtenemos

$$\mathcal{Z}[y_{k+2} + y_{k+1} - 2y_k](z) = \mathcal{Z}[1](z),$$

y desarrollando

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[y_{k+2} + y_{k+1} - 2y_k](z) &= \mathcal{Z}[y_{k+2}](z) + \mathcal{Z}[y_{k+1}](z) - 2\mathcal{Z}[y_k](z) \\ &= z^2\mathcal{Z}[y_k](z) - z + z\mathcal{Z}[y_k](z) - 2\mathcal{Z}[y_k](z) \\ &= (z^2 + z - 2)\mathcal{Z}[y_k](z) - z. \end{aligned}$$

Por otra parte

$$\mathcal{Z}[1](z) = \frac{z}{z-1}.$$

Entonces

$$(z^2 + z - 2)\mathcal{Z}[y_k](z) = z + \frac{z}{z-1} = \frac{z^2}{z-1},$$

con lo que

$$\mathcal{Z}[y_k](z) = \frac{z^2}{(z^2 + z - 2)(z-1)}.$$

Pasamos a fracciones simples

$$\mathcal{Z}[y_k](z) = \frac{z^2}{(z-1)^2(z+2)} = \frac{-1}{(z-1)^2} - \frac{3}{z-1} + \frac{4}{z+2},$$

y calculamos la transformada inversa obteniendo los desarrollos en series de Laurent

$$\frac{1}{z+2} = \frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{-2}{z}} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-2}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2)^n}{z^{n+1}}$$

si $|z| > 2$.

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}$$

si $|z| > 1$. Finalmente

$$\frac{-1}{(z-1)^2} = \frac{d}{dz}\left(\frac{1}{z-1}\right) = \frac{d}{dz}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{d}{dz}\frac{1}{z^{n+1}} = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{z^{n+2}}$$

si $|z| > 1$. Entonces si $|z| > 2$ se tiene que

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}[y_k](z) &= \frac{-1}{(z-1)^2} - \frac{3}{z-1} + \frac{4}{z+2} \\
&= -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{z^{n+2}} - 3\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}} + 4\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2)^n}{z^{n+1}} \\
&= \frac{1}{z} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{z^{n+2}} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{3}{z^{n+2}} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{4(-2)^{n+1}}{z^{n+2}} \\
&= \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{-n-4+4(-2)^{n+1}}{z^{n+2}},
\end{aligned}$$

por lo que si $k \geq 2$

$$y_k = 4(-2)^{k+1} - 4 + k.$$

Veamos a continuación el siguiente ejemplo, en que las raices son complejas:

$$\left\{\begin{array}{l} x_{n+2} - 2x_{n+1} + 2x_n = 1, \\ x_0 = x_1 = 0. \end{array}\right.$$

Si aplicamos la transformada Z a la ecuación, tenemos que

$$\mathcal{Z}[x_{n+2} - 2x_{n+1} + 2x_n](z) = \mathcal{Z}[1](z).$$

Por un lado

$$\mathcal{Z}[1](z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^n} = \frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \frac{z}{z-1},$$

mientras que

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}[x_{n+2} - 2x_{n+1} + 2x_n](z) &= \mathcal{Z}[x_{n+2}](z) - 2\mathcal{Z}[x_{n+1}](z) + 2\mathcal{Z}[x_n](z) \\
&= z^2\mathcal{Z}[x_n](z) - z^2x_0 - zx_1 - 2z\mathcal{Z}[x_n](z) - 2zx_0 + 2\mathcal{Z}[x_n](z) \\
&= (z^2 - 2z + 2)\mathcal{Z}[x_n](z),
\end{aligned}$$

de donde
$$\mathcal{Z}[x_n](z) = \frac{z}{(z-1)(z^2-2z+2)}.$$
Desarrollamos la función en serie de Laurent para calcular x_n. Para ello en primer lugar
$$\begin{aligned}\frac{z}{(z-1)(z^2-2z+2)} &= \frac{z}{(z-1)(z-1-i)(z-1+i)}\\ &= \frac{1}{z-1} - \frac{1}{2}\frac{1+i}{z-1-i} - \frac{1}{2}\frac{1-i}{z-1+i}.\end{aligned}$$
Calculamos de forma separada
$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n},$$
$$\frac{1}{z-1-i} = \frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1+i}{z}} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1+i}{z}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty}(1+i)^{n-1}\frac{1}{z^n},$$
$$\frac{1}{z-1+i} = \frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1-i}{z}} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1-i}{z}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty}(1-i)^{n-1}\frac{1}{z^n},$$
con lo que agrupando
$$\begin{aligned}\frac{z}{(z-1)(z^2-2z+2)} &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n} - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(1+i)^n\frac{1}{z^n} - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(1-i)^n\frac{1}{z^n}\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{2}(1+i)^n - \frac{1}{2}(1-i)^n\right)\frac{1}{z^n},\end{aligned}$$
y teniendo en cuenta que
$$\begin{aligned}(1+i)^n &= 2^{n/2}(\cos\frac{n\pi}{4} + i\sin\frac{n\pi}{4}),\\ (1-i)^n &= 2^{n/2}(\cos\frac{n\pi}{4} - i\sin\frac{n\pi}{4}),\end{aligned}$$
obtenemos
$$\frac{z}{(z-1)(z^2-2z+2)} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(1-2^{n/2}\cos\frac{n\pi}{4}\right)\frac{1}{z^n},$$
y por tanto
$$x_n = 1-2^{n/2}\cos\frac{n\pi}{4}.$$

4.4.5 Funciones de transferencia.

La función de transferencia asociada a la transformada Z se define de forma análoga a la función de transferencia asociada a la transformada de Laplace. Consideremos en este contexto una ecuación en diferencias finitas de la forma
$$a_n y_{k+n} + a_{n-1}y_{k+n-1} + ... + a_1 y_{k+1} + a_0 y_k = x_k, \tag{4.8}$$

siendo $a_i \in \mathbb{R}$, $0 \leq i \leq n$. Entonces, suponiendo que $y_i = 0$ $i < k$, tomando la transformada Z obtenemos que

$$(a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0)\mathcal{Z}[y_k](z) = \mathcal{Z}[u_k](z),$$

por lo que

$$\mathcal{Z}[y_k](z) = \frac{1}{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0}\mathcal{Z}[u_k](z).$$

Se define enotnces la función de transferencia asociada a la ecuación como

$$T(z) = \frac{\mathcal{Z}[y_k](z)}{\mathcal{Z}[u_k](z)} = \frac{1}{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0}.$$

Podemos estudiar entonces la estabilidad de la ecuación entendiendo ésta de forma análoga al caso continuo estudiada en el tema anterior, es decir, si para toda solución asociada a una condición inicial dada se verifica que

$$\lim_{k\to\infty} y_k = 0.$$

El siguiente resultado caracteriza la estabilidad del sistema en base a los polos de la función de transferencia.

Theorem 13 *El sistema dado por la ecuación (4.8) es estable si y sólo si todos los polos de la función de transferencia verifican que* $|z| < 1$.

4.5 Ejercicios

1. Determina el radio de convergencia de las series de potencias:

$$\text{(a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \qquad \text{(b)} \sum_{n=1}^{\infty} n^n z^n \qquad \text{(c)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}(z-i)^n$$

$$\text{(d)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} z^n \qquad \text{(e)} \sum_{n=1}^{\infty} 2^n z^n \qquad \text{(f)} \sum_{n=1}^{\infty} (3+(-1)^n)\ (z+2)^n$$

$$\text{(g)} \sum_{n=1}^{\infty} \cos(ni)\, z^n \qquad \text{(h)} \sum_{n=1}^{\infty} (n+a^n)\, z^n,\ (a>0) \qquad \text{(i)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} z^n$$

2. Calcula las series de potencias centradas en 0 de las siguientes funciones indicando su bola de convergencia.

$$\text{(a) } f(z) = \tfrac{1}{z^2+1} \qquad \text{(b)} f(z) = z^4 + z + 1 \qquad \text{(c) } f(z) = \tfrac{-1}{(z+1)^2}$$

$$\text{(d) } f(z) = L_0(z+1) \qquad \text{(e)} f(z) = e^{z^3} \qquad \text{(f) } f(z) = \tfrac{z-1}{(z+1)^2}$$

$$\text{(g) } f(z) = \cos(z^2) \qquad \text{(h)} f(z) = \tfrac{z-i}{z^2+1} \qquad \text{(i) } f(z) = \tfrac{z-1}{(1-z)^3}$$

3. Calcula el radio de convergencia de las siguientes series de potencias y estudia su carácter en la frontera del dominio de convergencia.

$$\text{(a)} \sum_{n=0}^{\infty} z^n \qquad \text{(b)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n} \qquad \text{(c)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$$

4. Calcula el desarrollo en serie de potencias de las funciones siguientes en el punto que se indica. Determina además el radio de convergencia de dicha serie.

   (a) $sen\, z, \quad z_0 = i$ (b) $e^z, \quad z_0 = i$ (c) $\dfrac{1}{1-z}, \quad z_0 = 0$

   (d) $\dfrac{z^2}{z+2}, \quad z_0 = 0$ (e) $\dfrac{z}{z+2}, \quad z_0 = 1$ (f) $L_\pi(z), \quad z_0 = -1$

   (g) $\dfrac{z}{1+z^2}, \quad z_0 = 0$ (h) $\dfrac{sen\, z}{z}, \quad z_0 = 0$

5. Dada la función $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$, calcula el valor de $f^{(20)}(1)$.

6. Calcula la serie de Laurent de la función $f(z) = \frac{1}{z-2}$ alredor de 2 y de 0.

7. Determina la serie de Laurent de la función $f(z) = \frac{1}{z\,(1-z)}$, alrededor de los puntos $z_0 = 0$, $z_0 = 1$ y $z_0 = \mathbf{i}$.

8. Calcula las series de Laurent centradas en 0 de las siguientes funciones indicando su anillo de convergencia.

   (a) $f(z) = \frac{z+1}{z^2}$ (b)$f(z) = ze^{1/z^4}$ (c) $f(z) = \frac{-1}{z(z+1)}$
   (d) $f(z) = \frac{\cos(z^2)}{z^3}$ (e)$f(z) = \frac{z}{z+1}$ (f) $f(z) = \frac{z-1}{z^3(z+1)^2}$
   (g) $f(z) = \cos(1/z^2)$ (h)$f(z) = \frac{z-i}{z^6}$ (i) $f(z) = \frac{z}{z(1-z)^3}$

9. Calcula la serie de Laurent de las siguientes funciones alrededor de los puntos que se indican:

   (a) $z^2 e^{1/z}, \quad z_0 = 0$ (b) $e^{1/(1-z)}, \quad z_0 = 1$

   (c) $z sen\,(1/(z-1)), \quad z_0 = 1$ (d) $\cos(1/z), \quad z_0 = 0$

10. Sea función $f(z) = L_\pi(z)$, ¿puede escribirse dicha función como una serie de Laurent en un cierto anillo alrededor del punto $z_0 = 0$? ¿Por qué?.

11. Calcula la serie de Laurent de $f(z) = \frac{1}{(1+z^2)^2}$ alrededor del punto $z_0 = \mathbf{i}$.

12. Calcula el desarrollo de Laurent alrededor de los polos de la función:

$$f(z) = \frac{z}{(z-1)(z-2\mathbf{i})}.$$

13. Encontrar la transformada Z de las siguientes sucesiones determinando su conjunto de convergencia.

    (a) $y_n = n+1$. (b) $y_n = (0,1,0,1,0,1,...)$. (c) $y_n = n^4$.
    (d) $y_n = (0,1,1,1,..)$. (e) $y_n = 2^{2n}$. (f) $y_n = 1+2^n$.
    (g) $y_n = 1/2^n$. (h) $y_n = n3^n$. (i) $y_n = (0,1,0,2,0,4,...,0,2^n,...)$.