Índice General

Capítulo 1

El cuerpo de los números complejos

Sumario. Suma y producto de números complejos. Potenciación y radicación de números complejos. Módulo y argumento. Topología del plano complejo. La esfera de Riemann.

1.1 Introducción a los números complejos

Supongamos que queremos resolver la ecuación

$$x^2 + 1 = 0.$$

Nos encontramos entonces que

$$x^2 = -1$$

y no existe ningún número real que verifique tal condición. Introducimos entonces un nuevo número i de manera que verifique la ecuación, esto es,

$$i^2 = -1.$$

Este número, del que todavía no hemos apuntado sentido alguno, debe tener las siguientes peculiaridades. $i^0 = 1$, $i^1 = i$, $i^2 = -1$, $i^3 = i \cdot i^2 = -i$, $i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1)(-1) = 1$ y a partir de esta todas las potencias se repiten, teniéndose que

$$i^n = i^k,\ k = 0, 1, 2, 3,$$

donde k es el resto de la división de n por 4, es decir $n = 4 \cdot l + k$, $l \in \mathbb{N}$.

Se define entonces un número complejo como una expresión de la forma

$$z = a + ib,\ a, b \in \mathbb{R}.$$

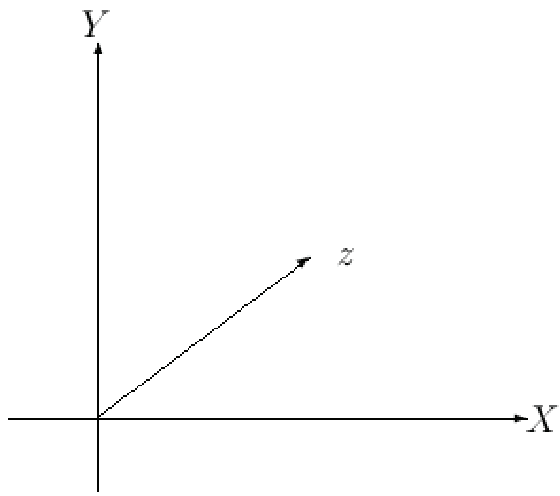
Dicha manera de escribir un número complejo se dice binómica.

De esta manera, si operamos formalmente tenemos que la soluciones de la ecuación

$$x^2 - 2x + 2 = 0$$

son
$$x = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{2 \pm i\sqrt{4}}{2} = 1 \pm 1i,$$
con lo que puede resolverse cualquier ecuación algebraica de grado dos.

Dado un número complejo $z = a + ib$, se define su parte real $\operatorname{Re} z = a$ y su parte imaginaria $\operatorname{Im} z = b$. Si la parte imaginaria es nula el número es real, mientras que si la parte real es nula, el número complejo se dice imaginario puro. Entonces podemos identificar los números complejos como pares ordenados de $\mathbb{R}^2$ donde la parte real sea el eje x y la parte imaginaria sea el eje y. Entonces podemos identificar los números complejos como vectores del plano



El conjunto de todos los números complejos lo denotaremos por $\mathbb{C}$ y es evidente que $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

1.2 Operaciones con números complejos: el cuerpo complejo

Vamos a dotar al conjunto de los números complejos de unas operaciones suma y producto de tal manera que el conjunto $\mathbb{C}$ con estas operaciones tenga estructura de cuerpo conmutativo.

Para definir la suma tomamos como idea la idenficación hecha anteriormente de $\mathbb{C}$ con el plano real. Dados entonces los números complejos $z = a + ib$ y $w = c + id$ definimos su suma
$$z + w = (a + c) + i(b + d),$$
es decir, atendiendo a la definición de suma de vectores en el plano real. Las propiedades de la suma son las siguientes.

(S1) La suma es conmutativa, es decir, dados $z, z' \in \mathbb{C}$ se verifica que $z + z' = z' + z$.

(S2) La suma es asociativa, es decir, dados $z, z', z'' \in \mathbb{C}$ se cumple que $(z + z') + z'' = z + (z' + z'')$.

(S3) Existe elemento neutro que se corresponde con el 0. Así para todo $z \in \mathbb{C}$ se cumple que $z + 0 = z$.

(S4) Dado $z = a + bi$, existe su elemento simétrico $-a + i(-b)$, que también escribiremos $-a - bi$.

Con estas cuatro operaciones se dice que $(\mathbb{C}, +)$ es un grupo abeliano o conmutativo. Es importante darnos cuenta que cuando los números complejos no tienen parte imaginaria, entonces la suma de múmeros complejos es la suma de números reales que ya conocemos.

Esta última idea la tendremos también en cuenta a la hora de definir el producto de números complejos. Para fijar ideas, sean los números complejos $z = a + ib$ y $w = c + id$ y definamos su producto como

$$z \cdot w = (a + ib) \cdot (c + id) = ac - bd + i(ad + bc).$$

Como vemos, si tanto b como d son nulos, recuperamos el producto usual de los reales. El producto verifica las siguientes propiedades.

(P1) El producto es conmutativo, es decir dados $z, z' \in \mathbb{C}$ se verifica que $z \cdot z' = z' \cdot z$.

(P2) El producto es asociativo, es decir, dados $z, z', z'' \in \mathbb{C}$ se cumple que $(z \cdot z') \cdot z'' = z \cdot (z' \cdot z'')$.

(P3) Existe el elemento neutro 1 que se corresponde con el neutro de los reales. Es decir $1 \cdot z = z$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

(P4) Todo número complejo z no nulo verifica que tiene inverso. Si $z = a + bi$ su inverso será $z^{-1} = \dfrac{a}{a^2 + b^2} - i\dfrac{b}{a^2 + b^2}$.

(P5) Propiedad distributiva del producto respecto de la suma. Si $z, z', z'' \in \mathbb{C}$ se verifica que $z \cdot (z' + z'') = z \cdot z' + z \cdot z''$.

Con estas propiedades (S1)–(S4) y (P1)–(P5) se verifica que $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ tiene estructura de cuerpo conmutativo.

1.3 El conjugado de un número complejo

Dado $z = a + ib$, se define su complejo conjugado $\overline{z} = a - ib$. El conjugado tiene las siguientes propiedades.

(C1) $\overline{\overline{z}} = z$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

(C2) $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$ para todo $z, w \in \mathbb{C}$.

(C3) $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$ para todo $z, w \in \mathbb{C}$.

(C4) $z \cdot \overline{z} \in \mathbb{R}$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

(C5) Si $z \in \mathbb{R}$, entonces $z = \overline{z}$.

La demostración de estas propiedades es sencilla. Por ejemplo para probar (C1) basta darse cuenta de que al cambiar dos veces de signo el número complejo queda como estaba. Para probar (C2), tomemos $z = a + ib$ y $w = c + id$. Entonces

$$\begin{aligned} \overline{z+w} &= \overline{(a+c+i(b+d))} = a+c-i(b+d) \\ &= (a-ib)+(c-id) = \overline{z}+\overline{w}. \end{aligned}$$

Para probar (C3), démonos cuenta de que

$$\overline{z \cdot w} = \overline{(ac-bd+i(ad+bc))} = ac-bd-i(ad+bc)$$

y por otro lado

$$\overline{z} \cdot \overline{w} = (a-bi) \cdot (c-di) = ac-bd-i(ad+bc),$$

con lo que la propiedad (C3) se verifica. Para probar (C4) hay que darse cuenta de que

$$z \cdot \overline{z} = a^2 + b^2 \in \mathbb{R}.$$

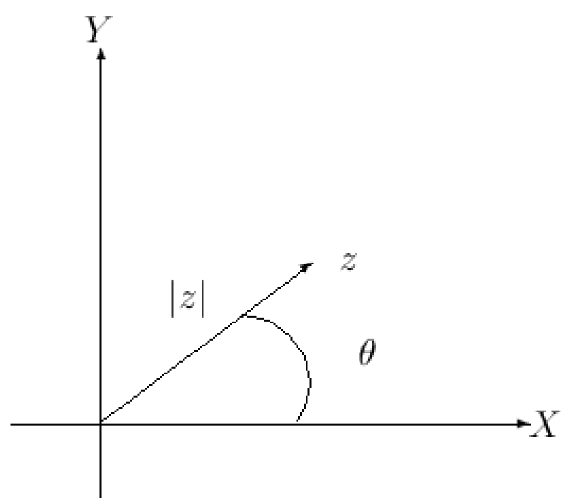
Por último, la propiedad (C5) es inmediata.

El uso del conjugado es muy útil en algunas ocasiones. Por ejemplo, si $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, tenemos que su elemento inverso puede escribirse como

$$z^{-1} = \frac{\overline{z}}{z \cdot \overline{z}}.$$

1.4 Módulo y argumento de un número complejo

Ya vismo que los número complejos los podemos identificar con el plano $\mathbb{R}^2$. En virtud de esta identificación, a todo número complejo $z \neq 0$ podemos asociarle y módulo y un argumento o ángulo que forma el vector determinado por el número complejo con el eje x.



Empecemos por el módulo. Dado $z = a + ib \in \mathbb{C}$, se define su módulo como

$$|z| := +\sqrt{z \cdot \overline{z}} = +\sqrt{a^2 + b^2}.$$

La propiedades del módulo son las siguientes:

(M1) Para todo $z \in \mathbb{C}$ se verifica que $|z| \geq 0$ y además $|z| = 0$ si y sólo si $z = 0$.

(M2) Para todo $z \in \mathbb{C}$ se verifica que $-|z| \leq \operatorname{Re} z \leq |z|$ y $-|z| \leq \operatorname{Im} z \leq |z|$.

(M3) $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$, para todo $z, w \in \mathbb{C}$.

(M4) Si $z \neq 0$ entonces $|z^{-1}| = 1/|z|$.

(M5) Si $z \neq 0$, entonces para todo $w \in \mathbb{C}$, $|w/z| = |w|/|z|$.

(M6) **Desigualdad de Cauchy–Schwarz**. Para todo par de números complejos z, w se verifica que $|\operatorname{Re}(z \cdot w)| \leq |z| \cdot |w|$ e $|\operatorname{Im}(z \cdot w)| \leq |z| \cdot |w|$.

(M7) **Desigualdad triangular.** Dados $z, w \in \mathbb{C}$ se verifica que $|z + w| \leq |z| + |w|$.

La primera propiedad es inmediata debido a la propia definición de módulo. Por otra parte $a^2 + b^2 = 0$ si y solamente si $a = b = 0$ con lo que la primera propiedad (M1) se verifica. Para comprobar la propiedad (M2) notemos que $-\sqrt{a^2 + b^2} \leq \max\{a, b\} \leq +\sqrt{a^2 + b^2}$. Probemos ahora (M3) para lo cual hacemos el cálculo

$$|z \cdot w| = +\sqrt{z \cdot w \cdot \overline{z \cdot w}} = +\sqrt{z \cdot \overline{z}} \cdot \sqrt{w \cdot \overline{w}} = |z| \cdot |w|.$$

Probemos ahora (M4) teniendo en cuenta que $z \cdot z^{-1} = 1$ y utilizando (M3) tenemos que

$$|z \cdot z^{-1}| = |z| \cdot |z^{-1}| = 1,$$

de donde se deduce que

$$|z^{-1}| = |z|^{-1} = 1/|z|.$$

La propiedad (M5) se deduce automáticamente de las propiedades (M3) y (M4). Para probar (M6) sabemos que por (M2) y (M3)

$$|\operatorname{Re}(z \cdot w)| \leq |z \cdot w| = |z| \cdot |w|$$

e

$$|\operatorname{Im}(z \cdot w)| \leq |z \cdot w| = |z| \cdot |w|.$$

Finalmente, para demostrar la propiedad triangular, calculamos

$$\begin{aligned} |z + w|^2 &= (z + w) \cdot (\overline{z + w}) = (z + w) \cdot (\overline{z} + \overline{w}) \\ &= z \cdot \overline{z} + w \cdot \overline{w} + z \cdot \overline{w} + \overline{z} \cdot w = |z|^2 + |w|^2 + z \cdot \overline{w} + \overline{z \cdot \overline{w}} \\ &= |z|^2 + |w|^2 + 2\operatorname{Re}(z \cdot \overline{w}) \leq |z|^2 + |w|^2 + 2|z| \cdot |w| \\ &= (|z| + |w|)^2, \end{aligned}$$

de donde tomando cuadrados obtenemos la desigualdad pedida.

Pasemos a continuación a introducir el argumento de un número complejo. Para ello sea $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Un número real θ se dice un argumento de z si se verifica que

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} z &= |z| \cos \theta, \\ \operatorname{Im} z &= |z| \sin \theta. \end{aligned}$$

Démonos cuenta que si θ es un argumento de z, cualquier multiplo de 2π de θ también es un argumento, por lo que el conjunto de los argumentos será

$$\begin{aligned}\arg(z) &= \{\theta : \mathrm{Re}\, z = |z|\cos\theta,\ \mathrm{Im}\, z = |z|\sin\theta\} \\ &= \{\theta + 2\pi k : k \in \mathbb{Z}\}\end{aligned}$$

donde θ es el único argumento comprendido entre $[0, 2\pi)$.

Un número complejo $z \neq 0$ se dice que está en forma polar si $z = |z|_\theta$, $\theta \in \arg(z)$. Se dice que está en forma trigonométrica si se escribe como $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$, $\theta \in \arg(z)$. Ambas formas tratan de escribir el número complejo dependiendo de su módulo y su argumento, al igual que las coordenadas polares en $\mathbb{R}^2$. Pero además en el caso de los números complejos, las formas polar y trigonométrica son útiles para trabajar con el producto, potencias y raíces de números complejos.

Por ejemplo sean $z, w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ y multipliquémoslos en forma trigonométrica. Entonces, si $\theta \in \arg(z)$ y $\varphi \in \arg(w)$ tenemos que

$$\begin{aligned}z \cdot w &= |z|(\cos\theta + i\sin\theta) \cdot |w|(\cos\varphi + i\sin\varphi) \\ &= |z| \cdot |w|(\cos\theta\cos\varphi - \sin\theta\sin\varphi + i(\cos\theta\sin\varphi + \cos\varphi\sin\theta) \\ &= |z| \cdot |w|(\cos(\theta + \varphi) + i\sin(\theta + \varphi))\end{aligned}$$

con lo que en foema polar, hacer una multiplicación de números complejos es básicamente multiplicar los módulos y sumar los argumentos, esto es

$$z \cdot w = (|z| \cdot |w|)_{\theta+\varphi}.$$

Igualmente si $n \in \mathbb{N}$

$$z^n = (|z|^n)_{n\theta}$$

y si $w \neq 0$

$$\frac{z}{w} = \left(\frac{|z|}{|w|}\right)_{\theta-\varphi}.$$

También son útiles las coordenadas polares para obtener las raíces n–ésimas de un número complejo. Si $z \neq 0$, entonces $w = \sqrt[n]{z}$ si y sólo si $z = w^n$. Entonces

$$w^n = (|w|^n)_{n\varphi} = |z|_\theta,$$

de donde

$$|w|^n = |z|$$

o equivalentemente

$$|w| = \sqrt[n]{|z|}$$

y

$$\varphi = \frac{\theta + 2\pi k}{n},\ k \in \mathbb{Z}.$$

Ahora bien, si $k \notin \{0, 1, ..., n-1\}$ tenemos que $k = n \cdot l + p$, $p \in \{0, 1, ..., n-1\}$ con lo que

$$\frac{\theta + 2\pi k}{n} = \frac{\theta + 2\pi(nl + p)}{n} = \frac{\theta + 2\pi p}{n} + 2\pi l$$

con lo que todos los argumentos de las raíces están son

$$\varphi = \frac{\theta + 2\pi k}{n},\ k = 0, 1, ..., n-1$$

y por tanto las raíces son

$$\sqrt[n]{z} = \left(\sqrt[n]{|z|}\right)_{\frac{\theta+2\pi k}{n}},\ k = 0, 1, ..., n-1.$$

1.5 Topología del plano complejo

La topología del plano complejo es similar a la que el alumno conoce de $\mathbb{R}^2$. Basta darse cuenta para ello que si $z = a + ib \in \mathbb{C}$, entonces su módulo $|z| = +\sqrt{z \cdot \overline{z}} = +\sqrt{a^2 + b^2}$ coincide con el módulo o norma del vector del plano correspondiente.

Así, dado $z_0 \in \mathbb{C}$ y $r > 0$, se define la bola abierta de centro z_0 y radio r al conjunto

$$B(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$$

y se define la bola cerrada como

$$\overline{B}(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq r\}.$$

Un conjunto $A \subset \mathbb{C}$ se dirá abierto si para cada $z_0 \in A$ existe $r > 0$ de manera que $B(z_0, r) \subset A$. Un conjunto $A \subset \mathbb{C}$ se dice cerrado si su complementario $\mathbb{C} \setminus A$ es abierto. Por supuesto que la bola abierta (respectivamente cerrada) es un conjunto abierto (respectivamente cerrado). Por ejemplo el conjunto

$$\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$$

es un conjunto abierto mientras que el conjunto

$$\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \geq 0\}$$

es cerrado. Por supuesto existen conjuntos que no son abiertos ni cerrados, como por ejemplo

$$\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0, \operatorname{Im} z \geq 0\}.$$

Dado un conjunto A se define el interior de A, $\operatorname{Int}(A)$, como el mayor abierto contenido en A. Se define su clausura, $\operatorname{Cl}(A)$, como el menor cerrado que contiene a A. Se define la frontera de A, $\operatorname{Fr}(A) = \operatorname{Cl}(A) \setminus \operatorname{Int}(A)$. El conjunto A es acotado si existe $M > 0$ tal que $|z| < M$ para todo $z \in A$. A se dirá compacto si es cerrado y acotado.

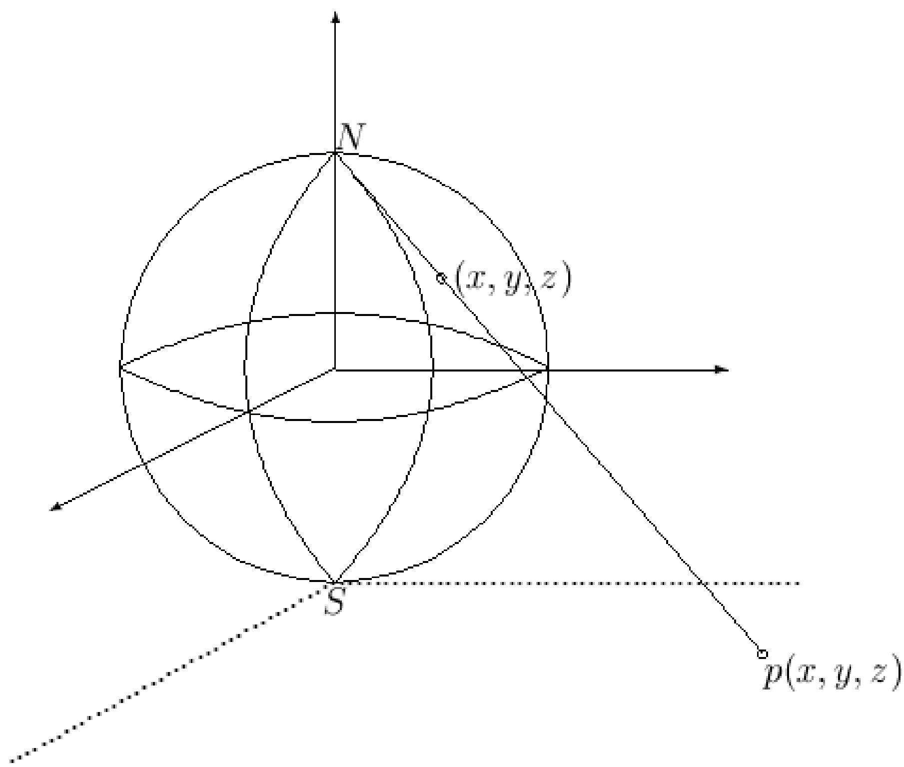
Por último, un punto z_0 es punto de acumulación de A si para todo $\varepsilon > 0$ se verifica que $B(z_0, \varepsilon) \cap A$ contiene infinitos puntos. Los puntos de acumulación son importantes porque son aquellos con los que calcularemos los límites y las nociones asociadas de derivada. Es fácil darse cuenta que si A es un conjunto abierto, entonces todos sus puntos son de acumulación.

1.5.1 La esfera de Riemann

Igual que en la recta real tenemos dos símbolos $+\infty$ para indicar números reales arbitrariamente grandes y $-\infty$ para indicar números reales arbitrariamente pequeños, en en cuerpo de los números complejos tenemos un simbolo ∞ para indicar números complejos con módulo arbitrariamente grande. Para visualizar este símbolo, consideramos la esfera S^2 dada por la ecuación $x^2+y^2+z^2=1$ y sea $N=(0,0,1)$ su polo norte y $S=(0,0,-1)$ su polo sur. Identificamos el conjunto de números complejos con el plano $z=-1$ (es decir un número complejo $z=a+ib$ lo escribiremos $(a,b,-1)$) y construimos una aplicación biyectiva $p: S^2\setminus\{N\}\to\mathbb{C}$ dada por

$$p(x,y,z)=\frac{-2(x+iy)}{z-1}$$

y que se obtiene de la intersección de la recta que pasa por N y el punto (x,y,z) con el plano $z=-1$.



Entonces podemos identificar el infinito del plano complejo con el polo norte de la esfera, que se conoce con el nombre de esfera de Riemann. Con estas ideas, obtenemos la bola de centro ∞ como

$$B(\infty,r)=\{z\in\mathbb{C}:|z|>r\}.$$

Ademas $z+\infty=\infty$, si $z\neq 0$, $z\cdot\infty=\infty$, $\infty^{-1}=0$ y $0^{-1}=\infty$. Como siempre $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$ y ∞/∞ son indeterminaciones, que habrá que resolver en el cálculo de los límites.

1.5.2 Sucesiones de numeros complejos

Una sucesión de números complejos es una aplicación $z_n : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$. Toda sucesión de números complejos la podemos ver como dos sucesiones de números reales al verificarse que $z_n = \operatorname{Re} z_n + i \operatorname{Im} z_n$. De esta manera el cálculo de límites se reduce a lo siguiente:

- $\lim_{n\to\infty} z_n = a + ib$ si y solo si $\lim_{n\to\infty} \operatorname{Re} z_n = a$ y $\lim_{n\to\infty} \operatorname{Im} z_n = b$.
- $\lim_{n\to\infty} z_n = \infty$ si y sólo si $\lim_{n\to\infty} |z_n| = +\infty$.

Es decir, el cálculo de límites de sucesiones de variable compleja se hace una vez conocido el cálculo de límites para sucesiones de variable real.

1.5.3 Series de numeros complejos

Lo mismo que hemos apuntado para sucesiones de números complejos ocurre para series de números complejos. Dada una sucesión de numeros complejos z_n se contruye la serie de término genera z_n generando la suceción $s_n = s_1 + s_2 + ... + s_n$. Al posible límite de dicha sucesión lo denotamos formalmente por $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ y decimos que la serie es convergente si el límite es un número complejo y divergente en caso contrario. De nuevo tenemos que $\sum_{n=1}^{\infty} z_n = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re} z_n + i \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Im} z_n$ por lo que podemos dar los siguientes casos.

- $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ es convergente si y sólo si $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re} z_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Im} z_n$ son convergentes.
- Si $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ es convergente se dice que $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ converge absolutamente. La convergencia absoluta implica la convergencia pero no al revés (por ejemplo considerar la serie ya conocida $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n/n$).

Por último, si tenemos dos series de números complejos $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$, podemos multiplicar ambas series de la siguiente manera

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} z_n\right) \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} w_n\right) = z_1 \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} w_n\right) + z_2 \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} w_n\right) + ... + z_n \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} w_n\right) + ...$$

Este producto, si ambas series son absolutamente convergentes puede reordenarse de la manera siguiente

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} z_n\right) \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} w_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{n} z_i \cdot w_{n-i+1},$$

que se conoce como forma del producto de Cauchy de series.

1.6 Ejercicios

1. Expresar los siguientes números complejos en forma binómica:

(a) $(1+i)^3$	(c) $\frac{2+3i}{3-4i}$	(e) $i^5 + i^{16}$	(g) $1 + i + i^2 + i^3$
(b) $\frac{1}{i}$	(d) $(1+\mathrm{i}\sqrt{3})^3$	(f) $2_{\pi/2}$	(h) $1_{\pi/4}$

2. Escribir en forma algebráica los complejos siguientes, donde ρ denota el módulo y θ un argumento

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \rho = 2, \theta = \pi & \text{b) } \rho = 1, \theta = -\pi/4 \\ \text{c) } \rho = \sqrt{2}, \theta = \pi/3 & \text{d) } \rho = 2, \theta = -\pi/2 \end{array}$$

3. Calcular las siguientes raíces:

$$\begin{array}{llll} \text{(a) } \sqrt[3]{1} & \text{(c) } \sqrt[3]{i} & \text{(e) } \sqrt[6]{-8} & \text{(g) } \sqrt[4]{-1} \\ \text{(b) } \sqrt[8]{1} & \text{(d) } \sqrt{1-i} & \text{(f) } \sqrt{3+4i} & \text{(h) } \sqrt[3]{-2+2i} \end{array}$$

4. Calcular el módulo y el argumento de los siguientes números complejos:

$$\text{(a) } 3+4i \quad \text{(b) } \tfrac{1+i}{1-i} \quad \text{(c) } \mathrm{i}^7 + i^{10} \quad \text{(f) } 1+i+i^2$$

5. Calcular el módulo y el argumento principal de los siguientes números complejos:

$$\begin{array}{llll} \text{(a) } 2i & \text{(c) } -3i & \text{(e) } -1 & \text{(g) } \sqrt[4]{-1} \\ \text{(b) } 3 & \text{(d) } \frac{1+i}{\sqrt{2}} & \text{(f) } -3+i\sqrt{3} & \text{(h) } \sqrt[3]{-2+2i} \end{array}$$

6. Representar gráficamente los siguientes conjuntos de números complejos:

$$\begin{array}{lll} \text{(a) } \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} & \text{(c) } \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\} & \text{(e) } \{z \in \mathbb{C} : z + \overline{z} \leq 1\} \\ \text{(b) } \{z \in \mathbb{C} : z - \overline{z} = i\} & \text{(d) } \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im} z < 0\} & \text{(f) } \{z \in \mathbb{C} : |\mathrm{Re} z| < 1\} \end{array}$$

7. Representar gráficamente el conjunto de los puntos del plano z tales que se verifica:

$$\begin{array}{llll} \text{(a) } \mathrm{Re}(z) + \mathrm{Im}(z) = z\overline{z} & \text{(b) } |z|^{-1} \geq 1,\ (z \neq 0) & \text{(c) } |z-5i| = 8 & \text{(d) } |z-5i| = 8 \\ \text{(e) } \mathrm{Im}(z^2) > 2 & \text{(f) } \mathrm{Re}(\overline{z^{-1}}) = 1 & \text{(g) } 2 < |z| < 3 & \text{(h) } \left|\frac{z-1}{z+1}\right| \leq 1 \\ \text{(i) } |z-2| = |1-2\overline{z}| & \text{(j) } \mathrm{Re}\,(z^2 - z) = 0 & & \end{array}$$

8. Dados los números complejos $z_1 = -2 - i$ y $z_2 = -4 + i$. Hallar $z_1 + z_2$, $3z_1 - 2z_2$, $z_1 z_2$, $(z_2)^{-1}$, $\frac{z_1}{z_2}$.

9. Si $z_1 = 6i$ y $z_2 = 8 - i$, hallar $z_1 z_2$, $\frac{z_1}{z_2}$, $\frac{z_2}{z_1}$, $z_2^2 - z_1$.

10. Hallar las partes real e imaginaria del complejo $z = \frac{1-i}{1+i}$.

11. Determinar x e y, para que se cumpla la igualdad $(1+i)(x+iy) = i$.

12. Calcular $(2+2i)^2$, $(2-2i)^2$, $(2+2i)(2-2i)$.

13. Demostrar que $|z| = 1 \Longleftrightarrow \mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(z^{-1})$.

14. Encontrar las cuatro raíces cuartas de $z_1 = -8(1 - \sqrt{3}i)$ y de $z_2 = -81$.

15. Calcular $(-1+\sqrt{3}i)^{30}$, $\sqrt[3]{-1+i}$.

16. ¿En qué vector se transforma $-\sqrt{3} + 3i$ al girarlo $\pi/2$?.¿Qué ángulo es necesario girarlo para que el resultado sea $2\sqrt{3}i$?

17. Demostrar la *identidad de Lagrange*, para $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ se verifica

$$\left(a^2 + b^2\right)\left(c^2 + d^2\right) = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2$$

Indicación: Considerar el número complejo $z = (a + bi)(c + di)$ y hallar su módulo de dos modos diferentes.

18. Sea $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ un polinomio con coeficientes reales, esto es, $a_i \in \mathbb{R}$ para $0 \le i \le n$. Se pide:

    (a) Comprobar que para todo $z \in \mathbb{C}$ se cumple la igualdad $p(\overline{z}) = \overline{p(z)}$.

    (b) Usando el apartado anterior, probar que si z_0 es solución compleja de $P(z) = 0$, entonces su conjugado también es solución.

    (c) Calcular todas las soluciones de $x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1 = 0$.

19. Resolver las ecuaciones

$$\text{(a) } x^2 + 1 = 0 \quad \text{(b) } x^3 + 2 = 0 \quad \text{(c) } x^5 + 64 = 0 \quad \text{(d) } (x^2 + 4)(x - 1)^2 = 0.$$

20. Estudiar la convergencia de las siguientes series complejas:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(2i)^2}$ (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n + i}{n}$ (e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1+i)^n}{n}$ (g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2^n) + \frac{i}{n}}{n^2}$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(in)^n}$ (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n + i \sin n}{n!}$ (f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi) + i\sin(n\pi)}{n}$ (h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{in \sin n}{3^n}$

21. Dada la serie $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$, comprobar que es absolutamente convergente si $|z| < 1$ y que es divergente para $|z| > 1$. Estudiar su carácter para $z \in \{1, -1, i, -i\}$.

22. Supongamos que $\preceq$ es una relación de orden sobre $\mathbb{C}$ de manera que restringida a $\mathbb{R}$ coincide con la usual, es decir, si $x, y \in \mathbb{R}$, entonces $x \preceq y$ si y sólo si $x \le y$. Supongamos que $\preceq$ cumple las condiciones de compatibilidad:

    (P1) $z \preceq z'$ si y sólo si $z + w \preceq z' + w$ para todo $w \in \mathbb{C}$.

    (P2) $z \preceq z'$ y $0 \preceq w$ implica $z \cdot w \preceq z' \cdot w$.

    Comprobar que para dicha relación se cumple que $i \not\preceq 0$ y $0 \not\preceq i$, con lo que $\mathbb{C}$ no está totalmente ordenado.

23. Comprobar que la relación $\preceq$ definida por

$$z \preceq z' \Leftrightarrow \mathrm{Re}z \le \mathrm{Re}z' \text{ e } \mathrm{Im}z \le \mathrm{Im}z'$$

es de orden sobre $\mathbb{C}$ y verifica las hipótesis (P1) y (P2) del ejercicio anterior.

24. Dados $z, w \in \mathbb{C}$ comprobar las desigualdades:

    (a) $|z - w| \ge ||z| - |w||$.

    (b) $|z - w|^2 + |z + w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2)$.

    (c) $|1 - \overline{z}w|^2 - |z - w|^2 = (1 - |z|^2)(1 - |w|^2)$.