GUIA 7

La transformada de Laplace

1. Concepto de la transformada de Laplace

Definición. *Una función* $u(t)$ *definida en* $0 \leq t < \infty$ *tiene transformada de Laplace si existe un real* $a > 0$ *tal que la integral* $\int_0^\infty e^{-st}u(t)\,dt$ *converge para* $s > a$. *En este caso, la transformada de Laplace de la función* u *es la función* $\hat{u}$ *definida en el intervalo* $a < s < \infty$ *cuyo valor en cada* s *está dado por*

$$\hat{u}(s) = \int_0^\infty e^{-st}u(t)\,dt. \tag{1}$$

A veces conviene denotar la transformada de Laplace $\hat{u}$ de u mediante $\mathcal{L}\{u\}$.

Recuérdese que la integral impropia $\int_0^\infty e^{-st}u(t)\,dt$ *converge* si la integral finita $\int_0^B e^{-st}u(t)\,dt$ existe para todo $B > 0$ y si $\lim_{B\to\infty} \int_0^B e^{-st}u(t)\,dt$ existe y es finito. Entonces, por definición,

$$\int_0^\infty e^{-st}u(t)\,dt = \lim_{B\to\infty} \int_0^B e^{-st}u(t)\,dt$$

Ejemplos.

(*Función constante*). La función constante $u(t) = 1$ tiene transformada de Laplace $\hat{u}(s) = \frac{1}{s}$ definida en $0 < s < \infty$. En efecto,

$$\hat{u}(s) = \int_0^\infty e^{-st}\,dt = \lim_{B\to\infty} \int_0^B e^{-st}\,dt = \lim_{B\to\infty} (-\frac{e^{-sB}}{s} + \frac{1}{s}) = \frac{1}{s},$$

para $0 < s < \infty$. Se observa que la integral $\int_0^\infty e^{-st}\,dt$ diverge para $s \leq 0$.

(*Función exponencial*). La función $u(t) = e^{at}$ tiene transformada de Laplace $\hat{u}(s) = \frac{1}{s-a}$ definida en $a < s < \infty$. En este caso,

$$\hat{u}(s) = \int_0^\infty e^{-st}e^{at}\,dt = \int_0^\infty e^{(a-s)t}\,dt = \frac{1}{s-a} \quad \text{para } s > a.$$

(*Función* t^n, $n > 0$ entero). La función $u(t) = t^n$ ($n > 0$ entero) tiene transformada de Laplace $\hat{u}(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}$ definida en $0 < s < \infty$.
Primero, para $n = 1$, integrando por partes obtenemos

$$\mathcal{L}\{t\} = \int_0^\infty t\,e^{-st}\,dt = \lim_{B\to\infty} (-\frac{t}{s}e^{-st}\Big|_{t=0}^{t=B}\ ) + \frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-st}\,dt = \frac{1}{s^2}$$

para $0 < s < \infty$.
Para $n > 1$, la integración por partes da

$$\mathcal{L}\left\{t^n\right\} = \int_0^\infty t^n\, e^{-st}\, dt = \lim_{B\to\infty} (-\frac{t^n}{s} e^{-st}\Big|_{t=0}^{t=B} \quad) \; .$$

$$+\frac{n}{s}\int_0^\infty t^{n-1} e^{-st}\, dt = \frac{n}{s}\mathcal{L}\left\{t^{n-1}\right\}.$$

Y aplicando esto repetidamente, obtenemos

$$\mathcal{L}\left\{t^n\right\} = \frac{n}{s} L\left\{t^{n-1}\right\} = \frac{n(n-1)}{s^2}\mathcal{L}\left\{t^{n-2}\right\}$$

$$= \cdots = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots 1}{s^n}\mathcal{L}\left\{1\right\} = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

para $0 < s < \infty$.

(*Funciones seno y coseno*). Se tiene

$$\mathcal{L}\left\{\cos at\right\} = \frac{s}{s^2+a^2}, \quad \mathcal{L}\left\{sen\, at\right\} = \frac{a}{s^2+a^2}$$

para $0 < s < \infty$, donde $a \neq 0$.
Integrando por partes obtenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left\{\cos a\, t\right\} &= \int_0^\infty e^{-s\,t}\cos a\, t\, dt = \frac{1}{a} e^{-s\,t} sen\, a\, t\,\Big|_{t=0}^{t=\infty} \\ &+ \frac{s}{a}\int_0^\infty e^{-s\,t} sen\, a\, t\, dt = \frac{s}{a}\mathcal{L}\left\{sen\, a\, t\right\}. \end{aligned} \tag{2}$$

Y volviendo a integrar por partes,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left\{sen\, a\, t\right\} &= \int_0^\infty e^{-s\,t} sen\, a\, t\, dt = -\frac{1}{a} e^{-st}\cos at\,\Big|_{t=0}^{t=\infty} \\ &- \frac{s}{a}\int_0^\infty e^{-s\,t}\cos a\, t\, dt = \frac{1}{a} - \frac{s}{a}\mathcal{L}\left\{\cos a\, t\right\}. \end{aligned}$$

Luego

$$\mathcal{L}\left\{sen\, a\, t\right\} = \frac{1}{a} - \frac{s^2}{a^2}\mathcal{L}\left\{sen\, a\, t\right\}$$

De aquí se obtiene la expresión para $\mathcal{L}\{sen\, a\, t\}$ y de (2) se obtiene la expresión para $\mathcal{L}\left\{\cos a\, t\right\}$.

(*Función de Heaviside*). La función escalón de Heaviside o salto unitario es la función H definida para todo t, $-\infty < t < \infty$, por

$$H(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}$$

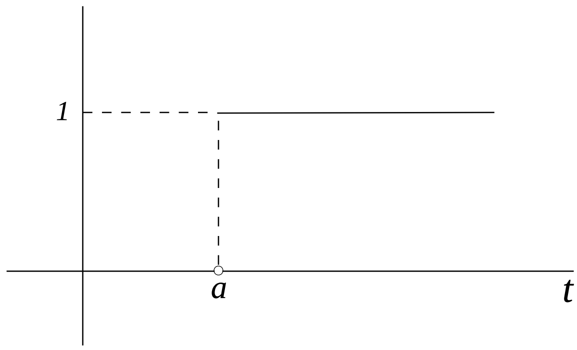

Figura 1: Función de Heaviside de salto unitario

La función *salto unitario en* a es la translación $H(t-a)$ de H (véase figura 1):

$$H(t-a) = \begin{cases} 0, & t < a \\ 1, & t \geq a \end{cases}$$

Para $a > 0$ y $0 < s < \infty$, se tiene

$$\mathcal{L}\{H(t-a)\} = \int_a^\infty e^{-st} dt = \frac{e^{-as}}{s}.$$

En general

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{H(t-a)\, u(t-a)\} &= \int_a^\infty e^{-st} u(t-a)\, dt \\ &= \int_0^\infty e^{-s(x+a)} u(x)\, dx = e^{-as} \mathcal{L}\{u\}. \end{aligned}$$

Es decir,

$$\mathcal{L}\{H(t-a)\, u(t-a)\} = e^{-as} \mathcal{L}\{u\} \ , \quad \text{para } a > 0,\, 0 < s < \infty.$$

(*Una función sin transformada de Laplace*). La función $u(t) = e^{t^2}$ no tiene transformada de Laplace. Pues la integral

$$\int_0^\infty e^{-st}\, e^{t^2}\, dt = \int_0^\infty e^{-\frac{s^2}{4}}\, e^{(t-\frac{s}{2})^2}\, dt$$

diverge para todo s.

¿Para cuáles funciones $u(t)$ existe la transformada de la Laplace? Los ejemplos anteriores sugieren el siguiente criterio:

Teorema 1 *(Criterio de Existencia). Supóngase que $u(t)$ es una función definida en $0 \leq t < \infty$ que satisface las siguientes condiciones:*

L1 *Cada intervalo finito* $[0, B]$ *se puede dividir en un número finito de intervalos* $[b_0, b_1] = [0, b_1], [b_1, b_2], \ldots [b_{n-1}, b_n] = [b_{n-1}, B]$ *tales que* $u(t)$ *es continua en* (b_{k-1}, b_k) *y* $\lim_{t \to b_{k-1}^+} u(t), \lim_{t \to b_k^-} u(t)$ *existen y son finitos.*

L2 *Existen constantes, a real y* $M > 0$ *,tales que*

$$|u(t)| \leq Me^{at} \qquad para \;\; 0 \leq t < \infty.$$

Entonces $u(t)$ *tiene transformada de Laplace* $\hat{u}(s)$ *definida en el intervalo* $a < s < \infty$*.*

Demostración. Esto es consecuencia del criterio de comparación para la convergencia de integrales impropias, pues por la condición (L2) se tiene

$$\int_0^\infty \left| e^{-st} u(t) \right| \, dt \leq \int_0^\infty e^{-st} \; Me^{at} \, dt = M \int_0^\infty e^{-(s-a)\,t} dt = \frac{M}{s-a}$$

para $a < s < \infty$.

La condición (L1) garantiza que las integrales finitas $\int_0^B e^{-st} u(t) \, dt$ existen para todo $B > 0$.

Funciones de orden exponencial. Las funciones $u(t)$ definidas en $0 \leq t < \infty$ que satisfacen las condiciones (L1) y (L2) se denominan *funciones continuas por tramos de orden exponencial* en $0 \leq t < \infty$. Para abreviar las denominaremos *funciones de orden exponencial.*

El Criterio de Existencia se puede enunciar brevemente diciendo:

Toda función $u(t)$ *de orden exponencial en* $0 \leq t < \infty$ *tiene transformada de Laplace* $\hat{u}(s)$ *definida en algún intervalo* $a < s < \infty$*.*

El mismo argumento utilizado para establecer el Criterio de Existencia demuestra la siguiente propiedad que se observa en los ejemplos 1 al 4 (Anulación de $\hat{u}$ en ∞):

(*Anulación de* $\hat{u}$ en ∞) *Para toda función* $u(t)$*de orden exponencial en* $0 \leq t < \infty$ *, la transformada de Laplace* $\hat{u}(s)$ *satisface*

$$\lim_{s \to \infty} \hat{u}(s) = 0$$

Utilizando argumentos un poco más sofisticados se puede demostrar que la propiedad de anulación de $\hat{u}$ en ∞ es válida para toda función u que posea transformada de Laplace. Esta propiedad sirve para determinar que ciertas funciones no son una transformada de Laplace:

Si $g(s)$ es una función definida en un intervalo $a < s < \infty$ tal que

$$\lim_{s\to\infty} g(s) \;\; \textit{no existe o} \;\; \lim_{s\to\infty} g(s) \neq 0,$$

entonces $g(s)$ no es transformada de Laplace de función alguna

Por ejemplo, las funciones detalladas a continuación no son transformadas de Laplace de función alguna:

- Polinómicas
$$p(s) = \sum_{k=0}^{n} a_k\, s^k,$$
- Trigonométricas, exponenciales y logarítmicas
$$\cos\omega s, \quad sen\,\omega s, \quad e^{as}\,(a > 0), \quad \ln s,$$
- Racionales,$\frac{p(s)}{q(s)}$, con grado(p)$\geq$grado (q).

2. Propiedades básicas de la transformada de Laplace

Conviene imaginar la transformada de Laplace como un *operador*

$$u \to \mathcal{L}\,\{u\} = \hat{u}$$

que a cada función $u(t)$ definida en $0 \leq t < \infty$ y de orden exponencial la transforma en una función $\hat{u}(s)$ definida en algún intervalo $a < s < \infty$. Este operador tiene las siguientes propiedades básicas que, en particular, lo hacen de utilidad en el cálculo de soluciones de problemas de valor inicial para ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes.

Teorema 2 . *(Propiedades básicas). Sean $u(t)$, $v(t)$ funciones de orden exponencial en $0 \leq t < \infty$ y a, b constantes reales.*

1. *(Linealidad). $\mathcal{L}\{au + bv\} = a\mathcal{L}\{u\} + b\mathcal{L}\{v\}$.*
2. *(Translación). Si $\hat{u}(s)$ =$\mathcal{L}\{u(t)\}(s)$ está definida en el intervalo $b < s < \infty$, entonces*
$$\mathcal{L}\{e^{at}u(t)\}(s) = \hat{u}(s - a)$$
para $a + b < s < \infty$.

3. *(Translación y truncamiento). Si* $a > 0$

$$\mathcal{L}\{H(t-a)\,u(t-a)\}(s) = e^{-as}\mathcal{L}\{u\}(s).$$

4. *(Transformada de la derivada).* $\mathcal{L}\{u'(t)\} = s\mathcal{L}\{u\} - u(0)$. *En general, para* $n \in \mathbb{N}$

$$\mathcal{L}\{u^{(n)}(t)\} = s^n\mathcal{L}\{u\} - s^{n-1}u(0) - s^{n-2}u'(0) - \ldots - s\,u^{(n-2)}(0) - u^{(n-1)}(0).$$

5. *(Derivada de la transformada).* $\mathcal{L}\{tu(t)\} = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}\{u\}$. *En general, para* $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{t^n u(t)\} &= -\frac{d}{ds}\mathcal{L}\{t^{n-1}u(t)\} \\ &= (-1)^2\frac{d^2}{ds^2}\,\mathcal{L}\{t^{n-2}u(t)\} \\ &= \vdots \\ &= (-1)^n\frac{d^n}{ds^n}\,\mathcal{L}\{u\}.\end{aligned}$$

6. *(Transformada de la integral).* $\mathcal{L}\{\int_0^t u(r)\,dr\} = \frac{1}{s}\,\mathcal{L}\{u\}$.

7. *(Periodicidad). Si* $u(t)$ *es periódica con período* $p > 0$ *, es decir,* $u(t+p) = u(t)$ *para todo* $t \geq 0$ *, y si* $u(t)$ *es continua en* $[0,p]$ *, entonces*

$$\mathcal{L}\{u\} = \frac{\int_0^p e^{-st}u(t)\,dt}{1 - e^{-ps}}.$$

Demostración. Todas estas propiedades son consecuencia directa de la definición. A modo de ejemplos, verificaremos desde 4 al 7.

4. Por sencillez, supondremos que $u'(t)$ es continua en $0 \leq t < \infty$. Integrando por partes

$$\mathcal{L}\{u'(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}u'(t)\,dt = e^{-st}u(t)\,\Big|_{t=0}^{t=\infty} + s\int_0^\infty e^{-st}u(t)\,dt$$

$$\mathcal{L}\{u'(t)\} = -u(0) + s\mathcal{L}\{u\}.$$

Aquí se usa el hecho de que $|u(t)| \leq Me^{at}$, esto implica que $e^{-st}u(t)\,|_{t=\infty} = \lim_{t\to\infty} e^{-st}u(t) = 0$, para $s > a$.

La identidad para $\mathcal{L}\{u^{(n)}(t)\}$ se obtiene aplicando repetidamente la identidad para $\mathcal{L}\{u'(t)\}$.

5. Suponiendo que es válido el intercambiar el orden de la derivación y la integración en $\frac{d}{ds}\mathcal{L}\{u\}$, se obtiene

$$\frac{d}{ds}\mathcal{L}\left\{u\right\} = \frac{d}{ds}\int_0^\infty e^{-st}u(t)\,dt = \int_0^\infty \frac{d}{ds}\,e^{-st}u(t)\,dt = -\int_0^\infty te^{-st}u(t)\,dt$$

$$\frac{d}{ds}\mathcal{L}\left\{u\right\} = -\mathcal{L}\{tu(t)\}$$

La identidad para $n > 1$ se obtiene aplicando repetidamente el caso $n = 1$.

6. Se deduce de (iv) tomando $\int_0^t u(r)\,dr$ en vez de u.

7. Se tiene

$$\mathcal{L}\left\{u\right\} = \int_0^\infty e^{-st}u(t)\,dt = \sum_{k=0}^{\infty}\int_{kp}^{(k+1)\,p} e^{-st}u(t)\,dt$$

$$\mathcal{L}\left\{u\right\} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-kps}\int_0^p e^{-st}u(t)\,dt = \frac{\int_0^p e^{-st}u(t)\,dt}{1-e^{-ps}},$$

para $s > a > 0$. Aquí utilizamos primero el hecho de que mediante el cambio de variable $r = t - kp$,

$$\int_{kp}^{(k+1)\,p} e^{-st}u(t)\,dt = \int_0^p e^{-s(\,r+kp)}u(\,r+kp)\,dr = e^{-kps}\int_0^p e^{-st}u(r)\,dr,$$

y, segundo, que

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x} \quad \text{para} \quad |\,x| < 1 \quad \text{con} \quad x = e^{-sp}.$$

Cálculo de transformadas de Laplace. Con ayuda de la definición, de un pequeño repertorio o tabla de transformadas de Laplace, y de las propiedades básicas se puede calcular fácilmente la transformada de Laplace de las funciones elementales de uso corriente en la solución de problemas de valor inicial para ecuaciones lineales con coeficientes constantes.

Ejemplos.

(*Polinomios*).

$$\mathcal{L}\left\{t^3 - 10t + 1\right\} = \mathcal{L}\left\{t^3\right\} - 10\mathcal{L}\left\{t\right\} + \mathcal{L}\left\{1\right\}$$

$$= \frac{3!}{s^4} - \frac{10}{s^2} + \frac{1}{s} = \frac{6}{s^4} - \frac{10}{s^2} + \frac{1}{s}$$

para $s > 0$, utilizando la linealidad de $\mathcal{L}$ y $\mathcal{L}\left\{t^n\right\} = \frac{n!}{s^{n+1}}$.

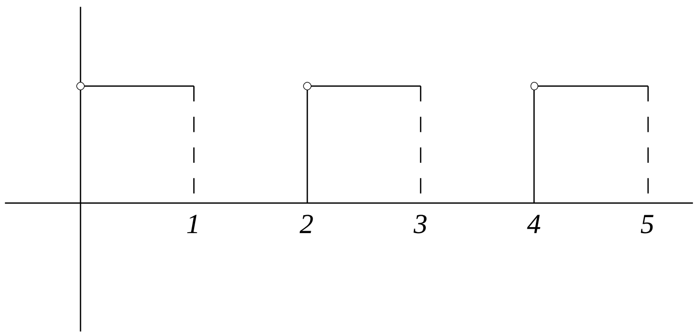

Figura 2: Función encendido-apagado

(*Seno y coseno hiperbólicos*). Si $\cosh at = \frac{e^{at}+e^{-at}}{2}$ y $senh\, at = \frac{e^{at}-e^{-at}}{2}$, entonces por la linealidad y el ejemplo (1) de la sección 1,

$$\mathcal{L}\left\{\cosh at\right\} = \frac{1}{2}\left(\mathcal{L}\left\{e^{at}\right\} + \mathcal{L}\left\{e^{-at}\right\}\right) =$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-a} + \frac{1}{s+a}\right) = \frac{s}{s^2-a^2}, \quad \text{para } s > |a|$$

Análogamente, $\mathcal{L}\left\{senh\, at\right\} = \frac{a}{s^2-a^2}$ para $s > |a|$.

(*Onda cuadrada* entre a y b , $0 < a < b$). La función $u(t)$ definida (conviene trazar su gráfica)

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } \ t < a \ \text{ ó } t \geq b \\ 1 & \text{si } \ \ a \leq t < b \end{cases}$$

se puede expresar en términos de la función de Heaviside como $u(t) = H(t-a) - H(t-b)$. Entonces por la linealidad de $\mathcal{L}$ y el ejemplo (4) de la sección 1,

$$\hat{u}(s) = \frac{e^{-as} - e^{-bs}}{s}$$

(*Otras funciones de interés*)

$$\begin{array}{ll} \mathcal{L}\left\{tsen\, at\right\} = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}\left\{sen\, at\right\} = -\frac{d}{ds}\left(\frac{a}{s^2+a^2}\right) = \frac{2as}{(s^2+a^2)^2} & \\ \mathcal{L}\left\{t^n e^{at}\right\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n}\mathcal{L}\left\{e^{at}\right\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n}\left(\frac{1}{s-a}\right) = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}} & s > a \end{array}$$

(*Función encendido-apagado*). La función (veáse figura 2.)

$$u(t) = \frac{1}{2}(1 + (-1)^{[|at|]}) = \begin{cases} 1, & 2ka \leq t < (2k+1)\,a \\ 0, & (2k+1)\,a \leq t < 2(k+1)\,a \end{cases} \quad k \text{ entero.}$$

es periódica con período $p = 2a$. Aquí $[|\ x\ |]$ denota el mayor entero n menor o igual que x.

Por la propiedad de periodicidad (vii),

$$\mathcal{L}\{u\} = \frac{1}{1-e^{-2as}} \int_0^{2a} e^{-st} u(t)\, dt = \frac{1}{1-e^{-2as}} \int_0^{a} e^{-st}\, dt$$

$$\mathcal{L}\{u\} = \frac{1-e^{-as}}{s(1-e^{-2as})} = \frac{1}{s\,(1+e^{-as})}$$

Producto de transformadas de Laplace. El ejemplo de $u(t) = v(t) = t$ muestra que, en general, $\mathcal{L}\{u\,v\} \neq \mathcal{L}\{u\}\,\mathcal{L}\{v\}$. Sin embargo, se puede expresar $\mathcal{L}\{u\}\mathcal{L}\{v\}$ como transformada de Laplace de una función obtenida a partir de u y v como sigue. Primero,

$$\mathcal{L}\{u\}\mathcal{L}\{v\} = \left(\int_0^\infty e^{-sx} u(x)\, dx\right)\left(\int_0^\infty e^{-sy} v(y)\, dy\right)$$

$$= \int_0^\infty \{\int_0^\infty e^{-s(x+y)} u(x) v(y)\, dx\} dy$$

Ahora, para cada y fijo ($0 \leq y \leq \infty$), hacemos el cambio de variable $t = x + y$ en la integral interna, de modo que $x = t - y$, $dt = dx$, $t = y$ cuando $x = 0$, $t = \infty$ cuando $x = \infty$, y

$$\int_y^\infty e^{-st} u(t-y)\, v(y)\, dt.$$

Luego

$$\mathcal{L}\{u\}\mathcal{L}\{v\} = \int_0^\infty \{\int_y^\infty e^{-st} u(t-y)\, v(y)\, dt\} dy.$$

Supongamos ahora que es posible considerar esta *integral iterada* como una *integral doble* sobre la región

$$R = \{(t, y)|\ 0 \leq y < \infty,\, y \leq t < \infty\} = \{(t, y)| \, 0 \leq t < \infty,\, 0 \leq y \leq t\},$$

y que es posible invertir el orden de integración. Entonces

$$\mathcal{L}\{u\}\mathcal{L}\{v\} = \iint_R e^{-st} u(t-y)\, v(y)\, dt\, dy$$

$$= \int_0^\infty \{\int_0^t e^{-st} u(t-y)\, v(y)\, dy\} dt = \int_0^\infty e^{-st} \{\int_0^t u(t-y)\, v(y)\, dy\} dt$$

$$= \mathcal{L}\{\int_0^t u(t-y)\, v(y)\, dy\}.$$

Definición.(*Convolución*). La convolución de dos funciones $u(t)$, $v(t)$ continuas por tramos de orden exponencial en $0 \leq t < \infty$ es la función $u * v$ definida en $0 \leq t < \infty$ por

$$(u * v)(t) = \int_0^t u(t-y)\, v(y)\, dy.$$

Suponiendo válido el cambio de orden en la integración indicado antes podemos establecer el siguiente teorema.

Teorema 3 *(Propiedad de convolución)*

$$\mathcal{L}\{u * v\} = \mathcal{L}\{u\}\mathcal{L}\{v\}$$

Ejemplo.

Sea $u(t) = t$ y $v(t) = sen\, at$. Entonces

$$u * v(t) = \int_0^t (t-y)\, sen\, ay\, dy = \frac{t}{a} - \frac{1}{a^2} sen\, at,$$

$$\mathcal{L}\{u * v\} = \mathcal{L}\{\frac{t}{a} - \frac{1}{a^2} sen\, at\} = \mathcal{L}\{t\}\mathcal{L}\{sen\, at\} = \frac{a}{t^2(t^2+a^2)}.$$

3. Transformada inversa de Laplace

Una propiedad fundamental de la transformada de Laplace es:

Teorema 4 *. (Propiedad de inversión). Sean $u_1(t)$ y $u_2(t)$ funciones continuas por tramos de orden exponencial en $0 \leq t < \infty$. Si $\mathcal{L}\{u_1\}(s) = \mathcal{L}\{u_2\}(s)$ en un intervalo $a < s < \infty$, entonces en cada intervalo finito $[0, B]$se tiene*

$$u_1(t) = u_2(t),$$

salvo a lo más en un número finito de puntos.

La demostración de este resultado requiere técnicas de análisis que no están al alcance de este curso. (Ver: R.V. Churchill. *Operational Mathematics*., McGraw-Hill, New York, 1972.)

La propiedad de inversión implica que dada una función $v(s)$ definida en un intervalo $a < s < \infty$, si existe una función $u(t)$ definida en $0 \leq t < \infty$ tal que

$$\mathcal{L}\{u\} = v,$$

entonces la función u es *esencialmente única*. Esto significa que si u_1 es otra función tal que $\mathcal{L}\{u_1\} = v$, entonces en cada intervalo $[0, B]$ las funciones u y u_1 coinciden, con la posible excepción de un número finito de puntos.

Por ejemplo, es fácil verificar que, para $a > 0$, las funciones

$$H(t-a) = \begin{cases} 0, & t < a \\ 1, & t \geq a \end{cases}, \qquad H_1(t) = \begin{cases} 0, & t \leq a \\ 1, & t > a \end{cases},$$

$$H_2(t) = \begin{cases} 0, & t < a \text{ ó } t \in \mathbb{Z} \\ 1, & \text{en otra parte} \end{cases}$$

son tres funciones diferentes *esencialmente iguales* en $0 \leq t < \infty$ tales que

$$\mathcal{L}\{H(t-a)\} = \mathcal{L}\{H_1\} = \mathcal{L}\{H_2\} = \frac{1}{s}.$$

En lo que sigue no distinguiremos entre funciones que sean esencialmente iguales.

Definición. Una función $v(s)$ definida en un intervalo $a < s < \infty$ *tiene transformada inversa de Laplace* si existe una función $u(t)$ definida en $0 \leq t < \infty$ tal que

$$\mathcal{L}\{u\} = v,$$

En este caso se dice que u es la transformada inversa de Laplace de v y se denota por $\mathcal{L}^{-1}\{v\}$.

Recordamos que por la propiedad de anulación de las transformadas de Laplace en ∞, una condición necesaria para que una función $v(s)$ posea transformada inversa de Laplace es que

$$\lim_{s\to\infty} v(s) = 0.$$

También, las propiedades básicas de la transformada de Laplace implican propiedades de la transformada inversa de Laplace. Por ejemplo, si v y w tienen transformada inversa , se tiene:

(*Linealidad*)

$$\mathcal{L}^{-1}\{av + bw\} = a\mathcal{L}^{-1}\{u\} + b\mathcal{L}^{-1}\{w\}.$$

(*Translación)*

$$\mathcal{L}^{-1}\{v(s-a)\} = e^{as}\mathcal{L}^{-1}\{v\}.$$

(*Derivada*)

$$\mathcal{L}^{-1}\{\frac{d^n}{ds^n}v(s)\} = (-1)^n t^n \mathcal{L}^{-1}\{v\}.$$

(*Integración* 1)

$$\mathcal{L}^{-1}\{\frac{v(s)}{s}\} = \int_0^t \mathcal{L}^{-1}\{v\}(r)\, dr\,.$$

(*Convolución*)

$$\mathcal{L}^{-1}\{v(s)w(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{v\} * \mathcal{L}^{-1}\{w\}.$$

(*Integración* 2)

$$\mathcal{L}^{-1}\{\int_s^\infty v(r)\, dr\} = \frac{1}{t}\mathcal{L}^{-1}\{v\}.$$

La última relación es consecuencia de:
(*Integral de una transformada).*

$$\int_s^\infty \mathcal{L}\{u\}(\gamma)\, d\gamma = \mathcal{L}\{\frac{u(t)}{t}\}.$$

La cual es válida para $u(t)$ tal que $\lim_{t\to 0^+} \frac{u(t)}{t}$ exista y sea finito.

4. Método de Heaviside

Este método se aplica al cálculo de soluciones de problemas lineales de valor inicial. Supóngase que se desea hallar la solución $x(t)$ en $0 \leq t < \infty$ de un problema de valor inicial para una ecuación lineal con coeficientes constantes

$$x'' + ax' + bx = f(t), \qquad x(0) = x_0,\, x'(0) = x_0' \tag{3}$$

El físico-matemático e ingeniero inglés Oliver Heaviside propuso la siguiente idea. Primero, se aplica transformada de Laplace a la ecuación

$$\mathcal{L}\{x'' + ax' + bx\} = \mathcal{L}\{f(t)\}.$$

Entonces, por las propiedades (i) y (iv) de transformada de Laplace, la ecuación se reduce a

$$s^2\mathcal{L}\{x\} - sx(0) - x'(0)) + a(s\mathcal{L}\{x\} - x(0)) + b\mathcal{L}\{x\} = \mathcal{L}\{f\}$$

$$(s^2 + as + b)\mathcal{L}\{x\} = \mathcal{L}\{f\} + x(0)s + ax(0) + x'(0).$$

Así, la transformada de Laplace de la solución $x(t)$ de (3) es

$$\mathcal{L}\{x\} = \frac{\mathcal{L}\{f\}}{(s^2 + as + b)} + \frac{x(0)s + ax(0) + x'(0)}{(s^2 + as + b)}.$$

La solución $x(t)$ de (3) en $0 \leq t < \infty$ se obtiene mediante la transformada inversa

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\mathcal{L}\{f\}}{(s^2 + as + b)} + \frac{x(0)s + ax(0) + x'(0)}{(s^2 + as + b)}\right\}.$$

Ejemplos. Buscaremos la solución de

$$\frac{dx}{dt} + 2x = 1, \qquad x(0) = 10.$$

Aplicando transformada a la ecuación, se obtiene

$$s\mathcal{L}\{x\} - x(0) + 2\mathcal{L}\{x\} = \frac{1}{s}.$$

De donde (usando fracciones parciales)

$$\mathcal{L}\{x\} = \frac{1}{s(s+2)} + \frac{10}{s+2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+2}\right) + \frac{10}{s+2},$$

$$\mathcal{L}\{x\} = \frac{1}{2}(\frac{1}{s} + \frac{19}{s+2}) \quad \text{para } 0 \leq t < \infty.$$

Finalmente, la solución $x(t)$ en $0 \leq t < \infty$ es

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{2}(\frac{1}{s} + \frac{19}{s+2})\} = \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s}\} + \frac{19}{2}\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s+2}\}$$

$$x(t) = \frac{1}{2} + \frac{19}{2}\, e^{-2t}.$$

Ejemplo. Nos proponemos determinar el movimiento desde el equilibrio de un oscilador lineal no amortiguado con masa m y constante de rigidez k sometido a una fuerza externa variable $F(t)$ que se anula antes del instante $t_0 > 0$ y que es constante e igual a F_0 después del instante t_0 :

$$F(t) = F_0 H(t - t_0) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ F_0, & t \geq t_0 \end{cases} .$$

El problema de valor inicial correspondiente es

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = \frac{F_0}{m} H(t - t_0), \qquad x(0) = 0, \quad x'(0) = 0,$$

con $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Tomando transformada de Laplace, la ecuación se reduce a

$$s^2\mathcal{L}\{x\} - sx(0) - x'(0) + \omega^2\mathcal{L}\{x\} = \frac{F_0}{m}\mathcal{L}\{H(t - t_0)\}.$$

Utilizando las condiciones iniciales, $x(0) = x'(0) = 0$, se obtiene

$$\mathcal{L}\{x\}(s) = \frac{F_0}{m}\frac{1}{s^2 + \omega^2}\mathcal{L}\{H(t - t_0)\},$$

y por tanto

$$x(t) = \frac{F_0}{m}\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s^2 + \omega^2}\mathcal{L}\{H(t - t_0)\}\}.$$

Por la propiedad de convolución de $\mathcal{L}$ y observando que

$$\frac{1}{s^2 + \omega^2} = \mathcal{L}\{\frac{1}{\omega} sen\, \omega t\},$$

se tiene que

$$\frac{1}{s^2 + \omega^2}\mathcal{L}\{H(t - t_0)\} = \frac{1}{\omega}\mathcal{L}\{sen\, \omega t\}\mathcal{L}\{H(t - t_0)\}\} =$$

$$\frac{1}{\omega}\mathcal{L}\{\; sen\, \omega t * H(t - t_0)\} = \frac{1}{\omega}\mathcal{L}\{\int_0^t sen\, \omega(t - z) H(z - t_0) dz\}$$

Luego,

$$x(t) = \frac{F_0}{m\,\omega}\int_0^t sen\, \omega(t - z) H(z - t_0) dz, \quad \text{para } 0 \leq t < \infty.$$

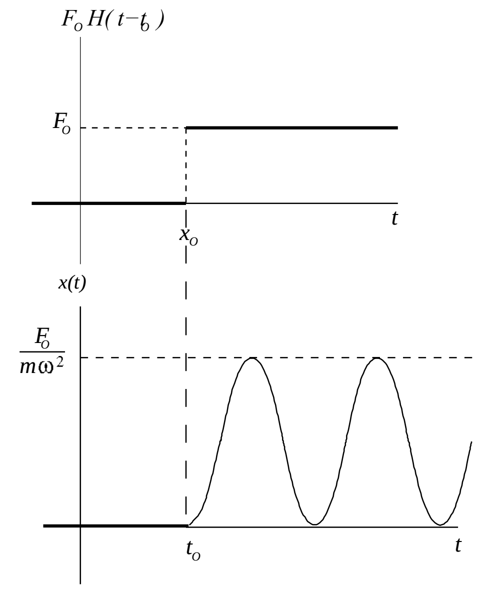

Figura 3: Oscilaciones bajo una fuerza repentina

Para evaluar la integral en esta expresión para $x(t)$, observamos que cuando $0 \leq t < t_0, 0 \leq z \leq t < t_0$ implica $H(z-t_0) = 0$, y cuando $t \geq t_0 \;\; 0 \leq z \leq t$ implica $0 \leq z < t_0$ con $H(z-t_0) = 0$ ó $t_0 \leq z \leq t$ con $H(z-t_0) = 1$. Así que

$$\int_0^t sen\,\omega(t-z)H(z-t_0)\,dz = \begin{cases} 0, & t < t_0 \\ \int_{t_0}^t sen\,\omega(t-z)\,dz, & t \geq t_0, \end{cases}$$

$$\int_0^t sen\,\omega(t-z)H(z-t_0)\,dz = \begin{cases} 0, & t < t_0 \\ \frac{1}{\omega}(1 - \cos\,\omega(t-t_0)\,), & t \geq t_0, \end{cases}$$

Se concluye que la solución $x(t)$ en $0 \leq t < \infty$ está dada por

$$x(t) = \begin{cases} 0, & t < t_0 \\ \frac{F_0}{m\;\omega^2}(1 - \cos\,\omega(t-t_0)\,), & t \geq t_0. \end{cases}$$

Esta solución representa un movimiento del oscilador en el cual en ausencia de fuerzas externas la masa permanece en reposo en la posición de equilibrio $x = 0$ hasta el instante t_0 cuando empieza a obrar la fuerza constante F_0. A partir del instante t_0, la masa inicia una oscilación armónica con frecuencia igual a la frecuencia natural ω del oscilador libre en la cual la masa cada $\frac{2\pi}{\omega}$ unidades de tiempo se desplaza $\frac{2F_0}{m\;\omega^2}$ unidades de distancia en la dirección de la fuerza F_0 y vuelve luego a la posición de equilibrio $x = 0$ (véase figura 3).

5. Resumen

5.1. Transformada de Laplace

1. Definición: $\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \int_0^\infty e^{-s\,t} f(t)\,dt.$

2. Linealidad: $\mathcal{L}\{\alpha\, f(t) + \beta\, g(t)\}(s) = \alpha\,\mathcal{L}\{f\}(s) + \beta\,\mathcal{L}\{g\}(s).$

3. Translación: si $\hat{u}(s) = \mathcal{L}\{u(t)\}(s)$ entonces $\hat{u}(s-a) = \mathcal{L}\{e^{at}u(t)\}(s).$

4. Translación y truncamiento: $\mathcal{L}\{H(t-a)u(t-a)\}(s) = e^{-as}\mathcal{L}\{u\}(s).$

5. Derivada n-esima:

$$\begin{array}{lcl}
\mathcal{L}\{f'(t)\}(s) & = & s\,\mathcal{L}\{f\}(s) - f(0^+). \\
\mathcal{L}\{f''(t)\}(s) & = & s^2\mathcal{L}\{f\}(s) - s\,f(0^+) - f'(0^+). \\
\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\}(s) & = & s^n\mathcal{L}\{f\}(s) - s^{n-1}\,f(0^+) - s^{n-2}f'(0^+) - \cdots - f^{(n-1)}(0^+).
\end{array}$$

6. Transformada de la integral:

$$\begin{array}{lcl}
\mathcal{L}\left\{\int_a^t f(r)\,dr\right\}(s) & = & \frac{1}{s}\mathcal{L}\{f\}(s) - \frac{1}{s}\int_0^a f(t)\,dt. \\
\mathcal{L}\left\{\underbrace{\int_0^t \cdots \int_0^t}_{\text{n-veces}} f(t)dt\ldots dt\right\}(s) & = & \frac{1}{s^n}\mathcal{L}\{f\}(s). \\
\int_s^\infty \mathcal{L}\{u\}(\gamma)\,d\gamma & = & \mathcal{L}\{\frac{u(t)}{t}\}\,(s)\,.
\end{array}$$

7. Producto y convolución

$$\begin{array}{lcl}
\mathcal{L}\{u\}L\{v\} & = & \mathcal{L}\{\int_0^t u(t-y)v(y)\ dy\}. \\
\mathcal{L}\{u * v\} & = & \mathcal{L}\{u\}\mathcal{L}\{v\} \qquad \text{, donde } (u*v)(t) = \int_0^t u(t-y)v(y)\ dy.
\end{array}$$

8. Transformada de una función periódica $f(s)$ con período $p > 0$

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \frac{\int_0^p e^{-s\,t} f(t)\,dt}{1 - e^{-p\,s}}.$$

9. Propiedades varias

$$\begin{array}{lcl}
\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\}(s) & = & \mathcal{L}(f)(s-a). \\
\mathcal{L}\{t^n f(t)\}(s) & = & (-1)^n \frac{d^n}{ds^n}\mathcal{L}\{f\}(s). \\
\mathcal{L}\{H(t-a)g(t)\}(s) & = & e^{-as}\mathcal{L}\{g(t+a)\}(s). \\
\mathcal{L}\{\frac{f(t)}{t}\}(s) & = & \int_s^\infty \mathcal{L}\{f\}ds \qquad \text{, si } \lim_{t\to 0^+} \frac{f(t)}{t} \text{ existe.}
\end{array}$$

5.2. Transformada inversa de Laplace

1. Linealidad de la transformad inversa:

$$\mathcal{L}^{-1}\{\alpha\, f(t) + \beta\, g(t)\} = \alpha\, \mathcal{L}^{-1}\{f\} + \beta\, \mathcal{L}^{-1}\{g\}.$$

2. Translación:

$$\mathcal{L}^{-1}\{v(s-a)\} = e^{as}\mathcal{L}^{-1}\{v\}.$$

3. Derivada de la transformada inversa:

$$\mathcal{L}^{-1}\{\frac{d^n}{ds^n}v(s)\} = (-1)^n t^n \mathcal{L}^{-1}\{v\}.$$

4. Integral

$$\begin{array}{lcl} \mathcal{L}^{-1}\{\frac{v(s)}{s}\} & = & \int_0^t \mathcal{L}^{-1}\{v\}(r)\; dr. \\ \mathcal{L}^{-1}\left\{\int_s^\infty v(r)\, dr\right\} & = & \frac{1}{t}\mathcal{L}^{-1}\{v\}. \end{array}$$

5. Convolución:

$$\mathcal{L}^{-1}\{v(s)w(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{v\} * \mathcal{L}^{-1}\{w\}.$$

A continuación presentamos una breve tabla de las transformadas de Laplace de algunas funciones

$$\begin{array}{lcllcl}
\mathcal{L}\{1\} & = & \frac{1}{s} & , \; \mathcal{L}\{\delta(t)\} & = & 1 \\
\mathcal{L}\{e^{at}\} & = & \frac{1}{s-a} & , \; \mathcal{L}\{\delta(t-a)\} & = & e^{-as} \\
\mathcal{L}\{t^n\} & = & \frac{n!}{s^{n+1}} & , \; \mathcal{L}\{\frac{t^{n-1}e^{at}}{(n-1)!}\} & = & \frac{1}{(s-a)^n}\;(n \geq 1) \\
\mathcal{L}\{sen\; at\} & = & \frac{a}{s^2+a^2} & , \; \mathcal{L}\{\frac{1}{2a^3}(sen\; at - at\cos at)\} & = & \frac{1}{(s^2+a^2)^2} \\
\mathcal{L}\{\cos at\} & = & \frac{s}{s^2+a^2} & , \; \mathcal{L}\{\frac{1}{2a^3}(sen\, a\, t + a\, t\cos\, a\, t)\} & = & \frac{s^2}{a^2(s^2+a^2)^2} \\
\mathcal{L}\{senh\; at\} & = & \frac{a}{s^2-a^2} & , \; \mathcal{L}\{\int_0^t \frac{t}{2n}\mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{(s^2+a^2)^n}]\; dt\} & = & \frac{1}{(s^2+a^2)^{n+1}} \\
\mathcal{L}\{\cosh at\} & = & \frac{s}{s^2-a^2} & , \; \mathcal{L}\{\frac{t}{2n}\mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{(s^2+a^2)^n}]\} & = & \frac{s}{(s^2+a^2)^{n+1}}
\end{array}$$

Nota:La función $\delta(t-t_0)$ es la función Delta de Dirac definida como sigue

$$\delta(t-t_0) = \begin{cases} \infty \text{ si } t = t_0 \\ 0 \text{ si } t \neq t_0 \end{cases}$$

y además

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)\; dt = 1.$$