1) CALCULAR El SIG LÍMITE:

$$\lim_{z\to i} \frac{z-i}{(z-1)(z^2+1)}$$ (6)

Solución:

$$\lim_{z\to i} \frac{z-i}{(z-1)(z^2+1)} = \frac{i-i}{(i-1)(i^2+1)} = \frac{0}{0}$$

ENTONCES

$$\lim_{z\to i} \frac{\cancel{z-i}}{(z-1)(z+i)\cancel{(z-i)}} =$$

$$\lim_{z\to i} \frac{1}{(z-1)(z+i)} = \frac{1}{(i-1)(i+i)}$$

$$= \frac{1}{(-1+i)(2i)} = \frac{1}{(\sqrt{2}\angle 135^\circ)(2\angle 90^\circ)}$$

$$= 0{,}354\angle 135^\circ = -0{,}25 + i0{,}25$$

2) REDEFINIR LA SIGUIENTE FUNCIÓN PARA QUE SEA CONTINUA EN TODO PUNTO DEL PLANO COMPLETO (4)

$$f_{(z)} = \frac{\operatorname{sen} z - \operatorname{sen}^2 z}{\operatorname{sen} z}$$

Solución:

LOS PUNTOS DE DISCONTINUIDAD SON:

$$\operatorname{sen} z = 0 \Rightarrow z = 0 \pm 2\pi N$$

POR LO QUE EVALUAMOS $f_{(0)}$

$$f_{(0)} = \frac{0-0}{0} = \frac{0}{0} \not\exists$$

CALCULAMOS EL LÍMITE:

$$\lim_{z\to 0} \frac{\operatorname{sen} z - \operatorname{sen}^2 z}{\operatorname{sen} z} = \frac{\cancel{\operatorname{sen} z}(1-\operatorname{sen} z)}{\cancel{\operatorname{sen} z}}$$

$$\lim_{z\to 0} (1-\operatorname{sen} z) = 1 - 0 = 1$$

POR LO TANTO:

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} z - \operatorname{sen}^2 z}{\operatorname{sen} z} & \text{si } z \neq 0 \\ 1 & \text{si } z = K\pi \end{cases}$$

DONDE $K = 0, \pm 1, \dots$

AHORA $f_{(z)}$ ES CONTINUA $\forall z$

3) DADO $f(z) = \dfrac{e^z}{z}$ CALCULAR

a) $f'_{(z)}$ (2) ; b) $f(2i)$ (3)

Solución:

a) $$f'_{(z)} = \frac{e^z \cdot z - e^z(1)}{z^2} = \frac{e^z(z-1)}{z^2}$$

b) $$f_{(2i)} = \frac{e^{2i}(2i-1)}{(2i)^2}$$

$$f_{(2i)} = \frac{(-0{,}42 + i0{,}91)(-1+2i)}{-4}$$

$$f_{(2i)} = \frac{(1\angle 114{,}6^\circ)(2{,}24\angle 116{,}57^\circ)}{4\angle 180^\circ}$$

$$f_{(2i)} = 0{,}56\angle 51{,}2^\circ = 0{,}35 + i0{,}44$$

Prof. Ander Miranda

DEMOSTRAR SI LA FUNCIÓN DADA ES DERIVABLE, EN CASO AFIRMATIVO, CALCULAR LA DERIVADA.

$$f(z) = Sen(2z) + i$$

Solución:

$$* \; Sen\,2z = \frac{e^{2(x+iy)} - e^{-2(x+iy)}}{2i} =$$

$$* \; e^{2(x+iy)} = e^{2x}\cos(2y) + i\,e^{2x} sen\,2y$$

$$* \; e^{-2(x+iy)} = e^{-2x}\cos(2y) - i\,e^{-2x} sen\,2y$$

$$* \; \frac{1}{2i} = -0{,}5i$$

$$Sen\,2z = -0{,}5i\left\{\cos 2y\left(e^{2x} - e^{-2x}\right) + \cdots\right.$$

$$\left.\cdots\, i\left(e^{2x} + e^{-2x}\right) sen\,2y\right\} =$$

$$= 0{,}5\left(e^{2x} + e^{-2x}\right) sen\,2y - i\,0{,}5\left(e^{2x} - e^{-2x}\right)\cos 2y$$

ENTONCES:

$$U = 0{,}5\left(e^{2x} + e^{-2x}\right) sen\,2y$$

$$V = -0{,}5\left(e^{2x} - e^{-2x}\right)\cos 2y + 1$$

$$U_x = 0{,}5\left(2e^{2x} - 2e^{-2x}\right) sen\,2y$$

$$U_x = \left(e^{2x} - e^{-2x}\right) sen\,2y$$

$$U_y = 0{,}5\left(e^{2x} + e^{-2x}\right) 2\cos(2y)$$

$$U_y = \left(e^{2x} + e^{-2x}\right)\cos(2y)$$

$$V_x = -0{,}5\left(2e^{2x} + 2e^{-2x}\right)\cos 2y$$

$$V_x = -\left(e^{2x} + e^{-2x}\right)\cos 2y$$

$$V_y = -0{,}5\left(e^{2x} - e^{-2x}\right)\left(-2sen\,2y\right)$$

$$V_y = \left(e^{2x} - e^{-2x}\right) sen\,2y$$

PARA QUE SEA DERIVABLE SE DEBE CUMPLIR

$U_x = V_y \Rightarrow$ SE CUMPLE

$U_y = -V_x \Rightarrow$ SE CUMPLE

LA DERIVADA ES:

$$f'(z) = 2Sen(2z)$$

Prof. Ander Miranda